najah213.com · نجاح 213

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.
2) عين باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5.
3) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2^{4n}-1$ مضاعف للعدد 5.
4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:
$$2^{412}+2^{8n+2}-5\equiv 0\ [5]$$

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها موجبة، حدها الأول:
$$u_2=4$$
حيث:
$$u_5\times u_7=4096$$
1) أحسب u_6 ثم الأساس q.
2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.
3) أحسب المجموع S_n بدلالة n، حيث:
$$S_n=u_2+u_3+\cdots+u_n$$
4) علما أن: $2^8=256$.
- عين العدد الطبيعي n بحيث: $S_n=1020$.

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f(x)=2x^3-3x^2+1$$
ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1) عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
2) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3) بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها.
4) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$f(x)=(x-1)(2x^2-x-1)$$
5) استنتج نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل.
6) أكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=\frac{1}{2}$.
7) أنشئ (C) و (Δ) في المعلم السابق.

تصحيح الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

1) ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5:
من أجل $n=0$: $2^0\equiv 1\ [5]$
من أجل $n=1$: $2^1\equiv 2\ [5]$
من أجل $n=2$: $2^2\equiv 4\ [5]$
من أجل $n=3$: $2^3\equiv 3\ [5]$
من أجل $n=4$: $2^4\equiv 1\ [5]$
نلخص بواقي قسمة 2^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k\in\mathbb{N}$
$2^n\equiv$	1	2	4	3	[5]

ونكتب:
$$\begin{cases}2^{4k}\equiv 1\ [5]\\ 2^{4k+1}\equiv 2\ [5]\\ 2^{4k+2}\equiv 4\ [5]\\ 2^{4k+3}\equiv 3\ [5]\end{cases}$$
ومنه:
- بواقي قسمة 2^{4k} على 5 هي 1.
- بواقي قسمة 2^{4k+1} على 5 هي 2.
- بواقي قسمة 2^{4k+2} على 5 هي 4.
- بواقي قسمة 2^{4k+3} على 5 هي 3.

2) نعين باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5:
لدينا: $1432\equiv 2\ [5]$
حسب خواص الموافقات: $1432^{2013}\equiv 2^{2013}\ [5]$
ونكتب: $1432^{2013}\equiv 2^{4\times 503+1}\ [5]$
ولدينا: $2^{4k+1}\equiv 2\ [5]$
حسب خاصية التعدي ينتج:
$$1432^{2013}\equiv 2\ [5]$$
ومنه باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5 هو 2.

3) نثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2^{4n}-1$ مضاعف للعدد 5.
$2^{4n}-1$ مضاعف للعدد 5 يعني أن $2^{4n}-1$ يقبل القسمة على 5.
أي:
$$2^{4n}-1\equiv 0\ [5]$$
نسمي الخاصية $P(n)$ التالية: $P(n):\ 2^{4n}-1\equiv 0\ [5]$
من أجل $n=0$ نجد: $0\equiv 0\ [5]$
ومنه $P(0)$ صحيحة.
نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.
أي:
$$2^{4n}-1\equiv 0\ [5]$$
ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$.
أي:
$$2^{4(n+1)}-1\equiv 0\ [5]$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا من الفرضية: $2^{4n} - 1 \equiv 0\ [5] \dots (1)$

ولدينا: $2^4 \equiv 1\ [5] \dots (2)$

نضرب (1) في (2) ينتج: $(2^{4n} - 1)2^4 \equiv 0 \times 1\ [5]$

بالنشر ينتج: $2^{4n} \times 2^4 - 2^4 \equiv 0\ [5]$

ونكتب: $2^{4n+4} - 2^4 \equiv 0\ [5]$

أي: $2^{4(n+1)} - 2^4 \equiv 0\ [5]$

وبما أن: $2^4 \equiv 1\ [5]$

فإن:

$$2^{4(n+1)} - 1 \equiv 0\ [5]$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

إذن العدد $2^{4n} - 1$ مضاعف للعدد 5.

4) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 0\ [5]$$

لدينا:

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 2^{4\times103} + 2^{2(4n+1)} - 5\ [5]$$
$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 2^{4\times103} + (2^{4n+1})^2 - 5\ [5]$$
$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 1 + (2)^2 - 5\ [5]$$
$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 1 + 4 - 5\ [5]$$
$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 5 - 5\ [5]$$

ومنه نجد:

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 0\ [5]$$

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها موجبة، حدها الأول:

$$u_2 = 4$$

حيث:

$$u_5 \times u_7 = 4096 \dots (1)$$

1) نحسب u_6 ثم الأساس q:

نكتب كلا من u_7 و u_5 بدلالة u_6.

لدينا:

$$\begin{cases} u_7 = u_6 \times q \\ u_6 = u_5 \times q \end{cases}$$

ونكتب:

$$\begin{cases} u_7 = u_6 \times q \\ u_5 = \dfrac{u_6}{q} \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة (1) ينتج: $u_6^2 = 4096$

نجد: $u_6 = 64$ أو $u_6 = -64$

بما أن حدود المتتالية (u_n) موجبة فإن:

$$u_6 = 64$$

لدينا: $u_6 = u_2 \times q^4$

ومنه: $q^4 = \dfrac{u_6}{u_2}$

بعد التعويض نجد: $q^4 = 16$

ونكتب: $q^4 = 2^4$ أو $q^4 = (-2)^4$

نجد: $q = 2$ أو $q = -2$

وبما أن (u_n) متتالية هندسية متزايدة فإن:

$$q = 2$$

2) نكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_2 بالعلاقة التالية:

$$u_n = u_2 \times q^{n-2}$$

بعد التعويض نجد: $u_n = 4 \times 2^{n-2}$

ونكتب: $u_n = 2^2 \times 2^{n-2}$

ومنه نجد:

$$u_n = 2^n$$

3) نحسب المجموع S_n بدلالة n:

$$S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

تعطى عبارة مجموع حدود متتالية هندسية بالعلاقة التالية:

$$S_n = \text{الحد الأول في المجموع} \times \frac{\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}} - 1}{\text{الأساس} - 1}$$

ويعطى عدد الحدود بالعلاقة التالية:

عدد الحدود = دليل الحد الأخير في المجموع − دليل الحد الأول في المجموع + 1

حيث:

- الحد الأول في المجموع هو u_2.
- الأساس هو q.
- عدد الحدود هو $n - 1$.

ومنه: $S_n = u_2 \times \dfrac{q^{n-1}-1}{q-1}$

بالتعويض: $S_n = 4 \times \dfrac{2^{n-1}-1}{2-1}$

ومنه نجد:

$$S_n = 4(2^{n-1} - 1)$$

4) علما أن: $2^8 = 256$.

- نعين العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 1020$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n = 1020$

أي: $4(2^{n-1} - 1) = 1020$

بالاختزال: $2^{n-1} - 1 = 255$

أي: $2^{n-1} = 256$

حيث: $2^{n-1} = 2^8$

ومنه: $n - 1 = 8$

بالمطابقة نجد:

ومنه:

$$n = 9$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

najah213.com · نجاح 213
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

1) نعين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

- نحسب نهاية f الدالة عند $-\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-3x^2+1)$

نأخذ نهاية أكبر أس: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- نحسب نهاية f الدالة عند $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-3x^2+1)$

نأخذ نهاية أكبر أس: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3)$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) ندرس تغيرات الدالة f ثم نشكل جدول تغيراتها:

- ندرس تغيرات الدالة f:

- نحسب الدالة المشتقة f' للدالة f:

لدينا: $f'(x) = 6x^2-6x$

ومنه نجد:

$$f'(x) = 6x(x-1)$$

- ندرس إشارة $f'(x)$:

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f'(x)=0$

أي: $6x(x-1)=0$

ومنه: $x-1=0$ أو $6x=0$

فنجد:

$$x=1 \text{ أو } x=0$$

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$	$-$		0	$+$		$+$	
$x-1$	$-$			$-$	0	$+$	
$(6x)(x-1)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	

حيث:

- الدالة f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$
- الدالة f متناقصة تماما على المجال: $]0\,;1[$

- نشكل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

حيث:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

3) نبين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها:

نحسب الدالة المشتقة الثانية $f''(x)$ حيث: $f''(x)=12x-6$

ومنه نكتب:

$$f''(x) = 6(2x-1)$$

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f''(x)=0$

أي: $2x-1=0$

ومنه نجد:

$$x=\frac{1}{2}$$

نحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ فنجد:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

ومنه (C) يقبل نقطة انعطاف w هي:

$$w\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$$

4) نتحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x)=(x-1)(2x^2-x-1)$$

ننشر العبارة $(x-1)(2x^2-x-1)$ فنجد:

$$(x-1)(2x^2-x-1) = 2x^3-x^2-x-2x^2+x+1$$

بعد الاختزال والترتيب نجد:

$$(x-1)(2x^2-x-1) = 2x^3-3x^2+1 = f(x)$$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x)=(x-1)(2x^2-x-1)$$

5) استنتاج نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل:

نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل هي مجموعة حلول المعادلة:

$$f(x)=0$$

أي: $(x-1)(2x^2-x-1)=0$

ومنه:

$$\begin{cases} x-1=0 \\ \text{أو} \\ 2x^2-x-1=0 \end{cases}$$

لدينا: $x-1=0$

أي: $x=1$

ولدينا: $2x^2-x-1=0$

نحسب المميز Δ فنجد: $\Delta=9$

ومنه حلول المعادلة هي:

$$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=1 \end{cases}$$

وبالتالي:

(C) يقطع محور الفواصل في النقطتين A و B حيث:

$$B\left(-\tfrac{1}{2}\,;0\right) \text{ و } A(1\,;0)$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

6) نكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = \frac{1}{2}$:

تعطى معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 بالعلاقة التالية:

$$(\Delta) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

حيث:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

بعد التعويض نجد:

$$(\Delta) : y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

7) ننشئ (C) و (Δ):

- لرسم المماس (Δ) يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta) : y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

x	$1/2$	0
y	$1/2$	$5/4$

فيصبح المماس (Δ) معرف بالنقطتين $w\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ و $w'\left(0\,;\frac{5}{4}\right)$.

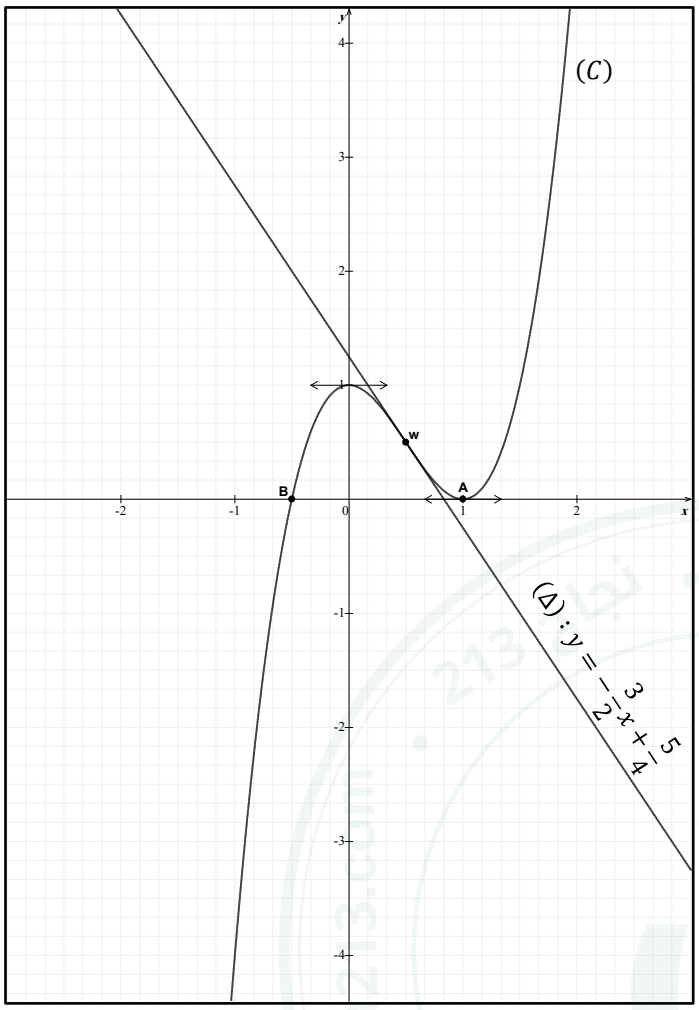
- لرسم المنحنى (C) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:

- نقط تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل.

$A(1\,;0)$ و $B\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$

- نقطة انعطاف المنحنى (C).

$w\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$



المنحنى الممثل للدالة f

حظ سعيد

05 56 24 69 06
bouguetof.hamid@yahoo.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com