najah213.com · نجاح 213

سلسلة الأنسب للمراجعة في البكالوريا

من كتابة الأستاذ

NAAM

الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

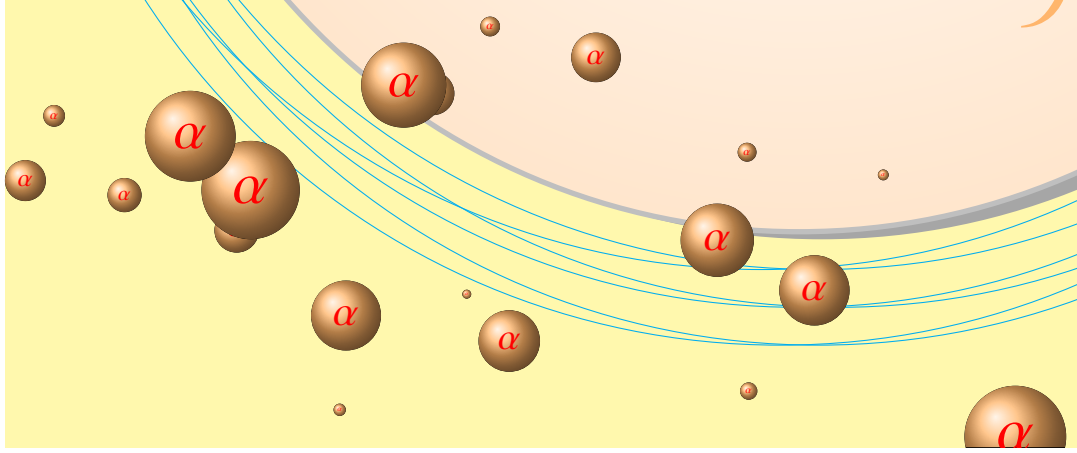
3 AS

الشعب : رياضيات ، تقني رياضي

$$a \equiv b[n]$$

$$9 \equiv -1[10]$$

$$d = PGCD(a, b)$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

الشعب
ت ر + رياضيات

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

الملف موجود في : elite of latex and python

التمرين 01

تمرين من إختبارات فصلية — الحل من هنا

a ؛ b ؛ n أعداد طبيعيّة غير معدومة حيث : $a = 2n + 3$ و $b = 5n - 2$.

1/ بيّن أنّه إذا كان a و b غير أوّليين فيما بينهما فإنّ : $PGCD(a;b) = 19$.

2/ عيّن قيم n التي من أجلها يكون : $PGCD(a;b) = 19$.

التمرين 02

بكالوريا تقني رياضي 2008 — الحل من هنا

n عدد طبيعي أكبر من 5 .

1/ a و b عددان طبيعيان حيث : $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$.

أ) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

ب) بيّن أنّ العددين a و b من مضاعفات 7 إذا و فقط إذا كان $n + 5$ مضاعف للعدد 7 .

ج) عيّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b) = 7$.

2/ نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث : $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$.

أ) بيّن أنّ العددين p و q يقبلان القسمة على $n - 5$.

ب) عيّن تبعا لقيم n و بدلالة n ؛ $PGCD(p;q)$.

التمرين 03

Nouvèlle calédonie 2002 — الحل من هنا

x و y عددان طبيعيان غير معدومين أوّليين فيما بينهما ، نضع : $S = x + y$ و $P = xy$.

1/ أ) برهن أنّ x و S أوّليان فيما بينهما و كذلك y و S .

ب) استنتج أنّ S و P أوّليان فيما بينهما .

ج) برهن أنّ العددين S و P من شفعيتين مختلفتين (أحدهما فردي و الآخر زوجي.) .

2/ عيّن القواسم الموجبة للعدد 84 .

3/ عيّن الأعداد الأوّليّة فيما بينها x و y حيث : $SP = 84$.

4/ عيّن عددين طبيعيين a و b يحققان الشرطين التّاليين :

$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases}$ ؛ مع $d = \mathbf{PGCD(a,b)}$.

التمرين 04

بكالوريا علوم طبيعة و حياة 2001 — الحل من هنا

n عدد طبيعي .

1/ أ) أدرس تبعا لقيم العدد n بواقي القسمة الإقليديّة للعدد 3^n على 10 .

ب) استنتج باقي القسمة الإقليديّة للعدد $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$ على 10 .

2/ أ) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n يكون :

$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}[10]$.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون

$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$.

التمرين 05

Métropole juin 2011 — الحل من هنا

الجزء الأول :

تذكير:

مبرهنة بيزو :

a و b عددان صحيحان أوّليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان نسبيان u و v بحيث : $au + bv = 1$.

مبرهنة غوص :

a, b, c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة ، إذا كان a يقسم bc و a أولي مع b فإنّ a يقسم c .

1/ باستعمال مبرهنة بيزو ، أثبت مبرهنة غوص.

2/ p و q عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

– باستعمال مبرهنة غوص بيّن أنّه إذا كان $a \equiv 0[p]$ و $a \equiv 0[q]$ حيث a عدد صحيح نسبي فإنّ : $a \equiv 0[pq]$.

الجزء الثاني :

S مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية n التي تحقق الجملة التالية :

$\begin{cases} n \equiv 9[17] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$.

1/ (u, v) ثنائية من الأعداد الصحيحة النسبية حيث :

من كتابة الأستاذ : NAAM

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

الشعب
ت ر + رياضيات

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

الملف موجود في : elite of latex and python

$17u + 5v = 1$

أ) برر وجود الثنائية $(u; v)$.

ب) نضع : $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.

– أثبت أنّ : n_0 عنصر من S .

ج) أعط مثالا عن عدد n_0 ينتمي إلى S .

2/ أ) n عدد صحيح نسبي من S .

– بيّن أنّ : $n - n_0 \equiv 0[85]$.

ب) بيّن أنّ العدد الصحيح n من S إذا و فقط إذا كان n يكتب على الشّكل $n = 43 + 85k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين 06

Amérique du Sud nov 2010 — الحل من هنا

n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 ، نضع : $A(n) = n^4 + 1$.

1/ أدرس شفعية $A(n)$ حسب شفعية n .

2/ أثبت أنّه مهما كان العدد الطبيعي n أكبر أو تساوي 2 فإنّ $A(n)$ غير مضاعف لـ 3 .

3/أثبت أنّه من أجل كلّ قاسم d لـ $A(n)$ فإنّ d أولي مع n و $n^8 \equiv 1[d]$

4/ d قاسم لـ $A(n)$ ، s أصغر الأعداد الطبيعية غير المعدومة k التي تحقق : $n^k \equiv 1[d]$.

أ) باستخدام القسمة الإقليدية لـ k على s ، بيّن أنّ : s يقسم k .

ب) استنتج أنّ s قاسم لـ 8 .

التمرين 07

Pondichéry avril 2010 — الحل من هنا

a و b عددان طبيعيان يحققان مايلي : $a^2 = b^3$ ، نضع $d = PGCD(a, b)$ ، u, v عددان صحيحان أوليان فيما بينهما حيث : $a = du$ و $b = dv$

1/ أثبت أنّ: $u^2 = dv^3$.

2/ استنتج أنّ : v يقسم u ، ثمّ بيّن أنّ : $v = 1$.

3/ a و b عددان طبيعيان ، أثبت أنّ : $a^2 = b^3$ إذا و فقط إذا كان كلّ من a و b على التّرتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي .

4/ أثبت أنّه إذا كان n مربع عدد طبيعي و مكعب عدد طبيعي فإنّ : $n \equiv 0[7]$ أو $n \equiv 1[7]$.

التمرين 08

Métropole sept 2009 — الحل من هنا

1/ أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009 على 11 .

ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{10} على 11 .

ج) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2009 + 2^{2009}$ على 11 .

2/ p عدد طبيعي و n عدد طبيعي غير معدوم نضع $A_n = 2^n + p$ ، $d_n = PGCD(A_n, A_{n+1})$

أ) بيّن أنّ : d_n يقسم 2^n .

ب) أثبت أنّ شفعية A_n من شفعية p .

3/ أ) بيّن أنّ شفعية d_n من شفعية p .

ب) استنتج $PGCD(2^{2009} + 2009, 2^{2010} + 2009)$.

التمرين 09

Amérique du Nord juin 2009 — الحل من هنا

1/ لتكن A مجموعة الأعداد الطبيعية التي تنتمي إلى المجال $[1; 46]$.

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) \cdots\cdots 23x + 47y = 1$.

أ) عيّن حلا خاصا (x_0, y_0) لـ (E) .

ب) عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) .

ج) استنتج أنّه يوجد عدد طبيعي وحيد x من A حيث $23x \equiv 1[47]$.

2/ a و b عددان صحيحان .

أ) أثبت أنّه إذا كان $ab \equiv 0[47]$ فإنّ : $a \equiv 0[47]$ أو $b \equiv 0[47]$.

ب) استنتج أنّه إذا كان $a^2 \equiv 1[47]$ فإنّ : $a \equiv 1[47]$ أو $a \equiv -1[47]$.

3/ أ) أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي p من A يوجد عدد صحيح q بحيث : $p \times q \equiv 1[47]$.

ب) نقبل أنّه من أجل كلّ p من A يوجد عدد طبيعي وحيد من A نرمز له بالرمز $inv(p)$ بحيث : $p \times inv(p) \equiv 1[47]$.

مثال : $inv(3) = 16$ لأنّ : $3 \times 16 \equiv 1[47]$

– عيّن الأعداد الطبيعية p من A التي تحقق $p = inv(p)$.

ج) أثبت أنّ : $46! \equiv -1[47]$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

الشعب
ت ر + رياضيات

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

الملف موجود في : elite of latex and python

التمرين 10

تمرين من إمتحانات فصلية — الحل من هنا

n عدد طبيعي .

1/ أدرس تبعا لقيم العدد n بواقي القسمة الإقليديّة للعدد 5^n على 7 .

2/ عيّن باقي القسمة الإقليديّة للعدد 6^{2n} على 7 .

3/ عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $5^n + 6^{2n} + 3$ قابلا للقسمة على 7.

حل التمرين 1

العودة إلى نص التمرين

1/ $a = 2n+3$ و $b = 5n-2$ ، نضع $d = \mathbf{PGCD(a,b)}$ ، و منه d/a و d/b ، إذن $d/5a$ و $d/2b$ و منه : $d/5a-2b$ أي : $d/19$ و منه $d \in \{1, 19\}$ و بما أن a و b غير أوليين فيما بينهما فإنّ : $\boxed{d = 19}$.

2/ $d = 19$ ، إذن $19/a$ و $19/b$ و منه $19/2a$ أي $19/4n+6$ و $19/5n-2$ و منه $19/5n-2-4n-6$ أي : $19/n-8$ و منه $n-8 = 19k$ مع $k \in \mathbb{N}$ أي قيم n التي من أجلها $d = 19$ هي $\boxed{n = 19k+8 \quad ,k \in \mathbb{N}}$.

حل التمرين 2

العودة إلى نص التمرين

$a = n-2$ و $b = 2n+3$.

أ) نضع : $d = PGCD(a,b)$ ، لدينا d/a و d/b و منه $d/2a$ أي $d/2n-4$ و منه $d/2n+3-2n+4$ أي $d/7$ و منه قيم d هي $\boxed{1, 7}$.

ب) نفرض أن a, b من مضاعفات 7 و نثبت أنّ $n+5$ مضاعفات 7 .

a, b من مضاعفات 7 إذن يوجد عددان طبيعيان غير معدومين k, k' حيث $a = 7k$ و $b = 7k'$ مع $b > a$ و منه $b-a = 7(k'-k)$ أي $b-a = 7\ell$ و من جهة أخرى $b-a = n+5$ و منه $\boxed{n+5 = 7\ell}$ و منه $n+5$ مضاعف لـ 7

نفرض أن $n+5$ مضاعفات 7 و نثبت أنّ a, b من مضاعفات 7 .

$n+5 = 7k$ و منه $n = 7k-5$ و منه $a = 7k-5-2$ و $b = 14k-7$ و منه $a = 7(k-1)$ و $b = 7(2k-1)$ أي a و b من مضاعفات 7 .

ج) $PGCD(a,b) = 7$ و منه $n+5$ من مضاعفات 7 حسب ب) و منه $7k = n+5$ أي $n = 7k-5$ أي $\boxed{n = 7m+2 \quad ,m \in \mathbb{N}}$.

2/ أ) $p = (n-5)b$ و $q = (n-5)a$ (يمكن التأكد من ذلك باستخدام القسمة الإقليدية) و منه $n-5$ يقسم كلا من p و q .

ب) $PGCD(p,q) = (n-5)PGCD(a,b)$ و منه :

من أجل $n = 7m+2$ فإن $PGCD(p,q) = 7(n-5)$.

من أجل $n \neq 7m+2$ فإن $PGCD(p,q) = (n-5)$.

حل التمرين 3

العودة إلى نص التمرين

1/ أ) x و y أوليان فيما بينهما .

نفرض بالخلف أنّ : x و S غير أوليين فيما بينهما ، إذن فهما يقبلان على الأقل قاسما مشتركا d يختلف عن 1 و منه $d/S-x$ أي d/y و منه d قاسم مشترك لـ x و y يختلف عن 1 و هذا تناقض لأنّ x و y أوليان فيما بينهما و منه x و S أوليان فيما بينهما ، نفس الطريقة تستخدم لإثبات أنّ y و S أوليان فيما بينهما .

ب) x و S أوليان فيما بينهما و منه حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث $ux+vS = 1$ و أيضا يوجد عددان صحيحان u' و v' حيث $u'y+v'S = 1$ لأنّ y و S أوليان فيما بينهما .

و منه $(ux+vS)(u'y+v'S) = 1$

و منه $uu'xy+uv'xS+u'vyS+vv'S^2 = 1$

و منه $uu'P+(uv'x+u'vy+vv'S)S = 1$ و منه حسب مبرهنة بيزو فإنّ P و S أوليان فيما بينهما حيث $S = x+y$ و $P = xy$.

ج) إذا كان كل من x و y زوجي و هذا غير ممكن لأنّ x و y أوليان فيما بينهما .

إذا كان كل من x و y فردي فإنّ S زوجي و P فردي .

إذا كان x و y من شفعيتين مختلفتين فإنّ S فردي و P زوجي .

و منه في كل الحالات S و P من شفعيتين مختلفتين.

2/ $84 = 7\times12 = 7\times4\times3 = 2^2\times3\times7$ و منه القواسم الموجبة لـ 84 هي : $1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84$.

3/ نفرض أن : $S = 2$ ومنه $P = 42$ غير ممكن (لأنّ S و P من شفعيتين مختلفتين) ، نفس الشيّء بالنسبة $S = 6, 14, 42$.

نفرض أن $S = 3$ أي $x = 1, y = 2$ أو العكس فإنّ $P = 2$ و هذا

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

الشعب
ت ر + رياضيات

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

الملف موجود في : elite of latex and python

غير ممكن لأنّ $P = 28$ ، نفس الكلام بالنسبة إلى $S = 4,6$.
نفرض أن $S = 42$ فإنّ $x = 28, y = 14$ أو العكس و منه P أكبر من 2 و هذا غير ممكن لأنّ $P = 2$.
نفرض أن $S = 21$ فإنّ $x = 7, y = 14$ أو العكس و منه $P = 98$ غير ممكن.
نفرض أن $S = 7$ فإنّ $x = 3, y = 4$ أو $x = 4, y = 3$ و منه $P = 12$ و منه $Sp = 84$ و منه الأعداد الأولية فيما بيها x, y حيث $SP = 84$ هي $x = 3, y = 4$ أو $x = 4, y = 3$.

/4 $\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases}$ ؛ مع $d = \mathbf{PGCD(a, b)}$.

يوجد عددان طبيعيان x و y أوليان فيما بينهما حيث $a = xd$ و $y = yd$ ، بما أن $ab = d^3$ فإنّ $xy = d$ و لدينا $a + b = 84$ و منه $(x + y)(xy) = 84$ ، إعتمادا على نتيجة السؤال السابق نجد $x = 3, y = 4$ أو $x = 4, y = 3$ و منه $d = 12$ ، إذن $a = 36, b = 48$ أو $a = 48, b = 36$.

حل التمرين 4

العودة إلى نص التمرين

1/ أ)

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	7	[10]

ب) $63 \equiv 3[10]$ و $9 \equiv -1[10]$ و منه $63 \times 9^{2001} \equiv -3[10]$.
$7 \equiv -3[10]$ و منه $7^{1422} = 3^{1422}[10]$ ، حسب الجدول السابق فإنّ : $7^{1422} \equiv 9[10]$ و منه
$63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv -12[10]$ أي $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 8[10]$
و منه باقي قسمة العدد $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$ على 10 هو 8 .
2/ أ) $3n \times 9^n \equiv n \times 3^{2n+1}[10]$ و $7 \equiv -3[10]$ و منه $7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10]$ لأنّ $2n + 1$ فردي و منه
$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$.
ب) $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ ومنه $(n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0[10]$ و منه $n - 1 \equiv 0[10]$ أي $\boxed{n = 10k + 1 \quad , k \in \mathbb{N}}$

حل التمرين 5

العودة إلى نص التمرين

الجزء الاول :

1/ a و b أوّليان فيما بينهما ، حسب بيزو فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث $au + bv = 1$ و منه $acu + bcv = c$ ن بما أنّ a/bc فإنّ a/bvc و a/acu و منه $a/auc + bvc$ أي a/c .
$a \equiv 0[p]$ و منه يوجد $k \in \mathbb{N}$ حيث $a = pk$ و $b \equiv 0[q]$ و منه يوجد $k' \in \mathbb{N}$ حيث $a = qk'$ و منه $pk = qk'$ لكن p و q أوّليان فيما بينهما و p/qk' و منه يوجد $k'' \in \mathbb{N}$ حيث $k' = pk''$ و منه $a = pqk''$ و منه $\boxed{a \equiv 0[pq]}$.

الجزء الثاني :

1/ أ) $17u + 5v = 1$ ن u و v موجودان حسب بيزو لأنّ 17 و 5 أوليان فيما بينهما .
ب) $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
$5v = 1 - 17u$ أي $5v \equiv 1[17]$ و منه $9 \times 5v \equiv 9[17]$ و لدينا $3 \times 17u \equiv 0[17]$ و منه $\boxed{n_0 \equiv 9[17]}$ ، لدينا $17u = 1 - 5v$ و منه $17u \equiv 1[5]$ و منه $3 \times 17u \equiv 3[5]$ و لدينا $9 \times 5v \equiv 0[5]$ و منه $\boxed{n_0 \equiv 3[5]}$ ، إذن n_0 عنصر من S .
ج) بتطبيق خوارزمية إقلدس نجد $17 = 3 \times 5 + 2$ و $5 = 2 \times 2 + 1$
و منه $1 = 5 - 2 \times 2$ أي $1 = 5 - (17 - 5 \times 3) \times 2$ و منه $1 = 17 \times (-2) + 5 \times 7$ أي $(u, v) = (-2, 7)$ و منه $n_0 = 213$.
2/ أ) $n \equiv 9[17]$ و $n_0 \equiv 9[17]$ و منه $n - n_0 \equiv 0[17]$ ، بنفس الطريقة نجد $n - n_0 \equiv 0[5]$ ، بما أنّ 5 و 17 أوليان فيما بينهما فإنّ $n - n_0 \equiv 0[17 \times 5]$ (حسب نتيجة سؤال سابق) و منه $\boxed{n - n_0 \equiv 0[85]}$.
ب) لدينا $n - 213 \equiv 0[85]$ أي $n \equiv 213[85]$ لكن $213 \equiv 43[85]$ و منه $n \equiv 43[85]$ أي $\boxed{n = 85k + 43 \quad , k \in \mathbb{N}}$.

حل التمرين 6

العودة إلى نص التمرين

1/ إذا كان n زوجي فإنّ $A(n)$ فردي ، و إذا كان n فردي فإنّ $A(n)$ زوجي .
2/ n عدد طبيعي أكبر أو تساوي 2 .
إذا كان $n \equiv 0[3]$ فإنّ $n^4 + 1 \equiv 1[3]$.
إذا كان $n \equiv 1[3]$ فإنّ $n^4 + 1 \equiv 2[3]$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

الشعب
ت ر + رياضيات

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

الملف موجود في : elite of latex and python

إذا كان $n \equiv 2[3]$ فإنّ $n^4 + 1 \equiv 2[3]$.

و منه n ليس مضاعف لـ 3 .

3/ d قاسم لـ $A(n)$ و منه يوجد عدد طبيعي k حيث $n^4 + 1 = kd$

و منه $kd - n^3 \times n = 1$ و منه حسب بيزو فإنّ d و n أوليان فيما بينهما و منه كل قاسم لـ $A(n)$ أولي مع n .

d قاسم لـ $A(n)$ و منه $n^4 + 1 \equiv 0[d]$ و منه $n^4 \equiv -1[d]$ و منه $\boxed{n^8 \equiv 1[d]}$.

4/ أ) $n^k \equiv 1[d]$ حسب القسمة الإقليدية لـ k على s توجد ثنائية وحيدة (q, r) حيث $k = sq+r$ مع $0 \leq r < s$ و منه $n^k = (n^s)^q \times n^r$

لكن $n^s \equiv 1[d]$ و منه $(n^s)^q \equiv 1[d]$ لكن $n^k \equiv 1[d]$ و منه $n^r \equiv 1[d]$ حيث $r < s$ لكن s أصغر عدد طبيعي يحقق $n^s \equiv 1[d]$

و منه $r = 0$ و منه s يقسم k .

ب) وجدنا سابقا أنّ $n^8 \equiv 1[d]$ و منه s يقسم 8 لأنّ s يقسم k .

حل التمرين 7

العودة إلى نص التمرين

1/ لدينا $a^2 = b^3$ و $a = du, b = dv$ حيث $d = PGCD(a, b)$ و منه $(du)^2 = (bv)^3$ و منه $d^2u^2 = d^3v^3$ و منه $\boxed{u^2 = dv^3}$.

2/ وجدنا $u^2 = dv^3$ و منه v/u^2 و u و v أوليان فيما بينهما و منه v يقسم u ، $PGCD(u, v) = 1$ لكن v يقسم u أي $PGCD(u, v) = v$ و منه $\boxed{v = 1}$.

3/ نفرض أنّ $a^2 = b^3$ ، و $a = du$ ، $b = dv$ ، وجدنا $v = 1$ و منه $u^2 = d$ و $b = d$ و منه $b = u^2$ و $a = du = u^3$ و منه كل من a و b على الترتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي .

نفرض أنّ كل من a و b على الترتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي m أي $a = m^3$ و $b = m^2$ و منه $a^2 = m^6$ و $b^3 = m^6$ و منه $a^2 = b^3$ ، نستنتج أنّ $a^2 = b^3$ معناه كل من a و b على الترتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي .

4/ $n = a^2 = b^3$ ، من نتيجة السؤال السابق يوجد عدد طبيعي d حيث $a = d^3$ و $b = d^2$ و منه $n = d^6$

$d \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$d^6 \equiv$	0	1	64	729	4096	15625	46656
$n \equiv ...[7]$	0	1	1	1	1	1	1

و منه $\boxed{n \equiv 0[7]}$ أو $\boxed{n \equiv 1[7]}$

حل التمرين 8

العودة إلى نص التمرين

1/ أ) $2009 = 11 \times 182 + 7$ و منه الباقي يساوي 7 .

ب) $2^5 = 32$ و منه $2^5 \equiv 10[11]$ أي $2^5 \equiv -1[11]$ و منه $2^{10} \equiv 1[11]$ و منه الباقي يساوي 1 .

ج) $2^{009} = 2^{10\times200+9} = (2^{10})^{100} \times 2^9$ ، لدينا $2^{10} \equiv 1[11]$ و منه $(2^{10})^{100} \equiv 1[11]$ و لدينا $2^9 = 2^5 \times 2^4$ و $2^5 \equiv -1[11]$ و $2^4 \equiv 5[11]$ و $2009 \equiv 7[11]$ و منه

$2^{009} + 2009 \equiv -5 + 7[11]$ أي الباقي هو 2 .

2/ أ) كل قاسم لـ A_n و A_{n+1} يقسم الفرق بينهما لكن $A_{n+1} - A_n = 2^n$ و منه d_n يقسم 2^n .

ب) $A_n = 2^n + p$ ، 2^n عدد طبيعي زوجي و منه شفعية A_n من شفعية p .

3/ أ) من نتيجة السؤال السابق A_n و A_{n+1} لهما نفس شفعية p و منه :

– إذا كان p فردي فإنّ A_n و A_{n+1} كذلك و منه قاسمهما المشترك الأكبر أيضا نفس النتيجة إذا كان p زوجي و منه d_n له نفس شفعية p .

ب) A_{2009} و A_{2010} فرديان لأنّ 2009 فردي و منه d_n أيضا فردي وجدنا أنّ d_n يقسم 2^n ، كل قواسم 2^n زوجية إلا العدد 1 نستنتج أنّ $d_n = 1$ و منه العددان $2^{2009} + 2009$ و $2^{2010} + 2009$ أوليان فيما بينهما .

حل التمرين 9

العودة إلى نص التمرين

1/ أ) $(x_0, y_0) = (-2, 1)$ حل خاص لـ (E) لأنّ $-2\times23+47\times1 = 1$.

ب) (x, y) حل لـ (E) ، لدينا $\begin{cases} 23x + 47y = 1 \\ -2 \times 23 + 47 \times 1 = 1 \end{cases}$ و منه

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

الشعب
ت ر + رياضيات

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

الملف موجود في : elite of latex and python

$23(x+2) = 47(1-y)$ ، بتطبيق غوص نجد 23 يقسم $47(1-y)$ و 23 و 47 أوليان فيما بينهما ومنه 23 يقسم $y-1$ و منه $1-y = 23k$ أي $y = 1-23k$ ، بالتعويض نجد $x = 47k-2$ و منه حلول (E) هي $\boxed{\{(47k-2, 1-23k) \quad ,k \in \mathbb{Z}\}}$.

ج) $32x = 1-47y$ حيث y عدد صحيح و منه يوجد $23x \equiv 1[47]$ أي $23x+47y = 1$ ، حسب نتيجة السؤال السابق فإنّ $x = 47k-2$ و $y = 1-23k$ لكن $1 \leq x \leq 47$ و منه $1 \leq 47k-2 \leq 47$ و منه $3 \leq 47k \leq 47$ و منه $k = 1$ أي $\boxed{x = 45}$ ومنه العدد الطبيعي الوحيد x من A الذي يحقق $23x \equiv 1[47]$ هو 45 .

2/ أ) $ab \equiv 0[47]$ و منه 47 يقسم ab ، لكن 47 أولي و منه فهو يقسم إما a أو يقسم b و منه $a \equiv 0[47]$ أو $b \equiv 0[47]$.

ب) $a^2 \equiv 1[47]$ و منه $a^2-1 \equiv 0[47]$ و منه

$(a-1)(a+1) \equiv 0[47]$ حسب نتيجة السؤل السابق فإنّ

$a-1 \equiv 0[47]$ أو $a+1 \equiv 0[47]$ و منه $\boxed{a \equiv 1[47]}$ أو $\boxed{a \equiv -1[47]}$

3/ أ) من أجل كل p من A يكون أولي مع 47 لأنّ 47 أولي و منه حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان q و m حيث $pq+47m = 1$ و منه $\boxed{pq \equiv 1[47]}$.

ب) $p = inv(p)$ و منه $p^2 \equiv 1[47]$ و منه $p \equiv 1[47]$ أو $p \equiv -1[47]$ و منه $\boxed{p=1}$ أو $\boxed{p=46}$.

ج) من أجل كل p من A حيث $2 \leq p \leq 45$ يوجد $inv(p)$ حيث $p \times inv(p) \equiv 1[47]$ حسب نتيجة سؤال سابق لكن $45! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 45$ و منه $45! \equiv 1[45]$.

لدينا $46! = 46 \times 45!$ و منه $46! \equiv 46[47]$ أي $\boxed{46! \equiv -1[45]}$.

حل التمرين 10

العودة إلى نص التمرين

سهل يترك للقارئ .

الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

من كتابة الأستاذ : NAAM

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com