najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

1 الدالة كثير حدود

نسمي دالة كثير حدود كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ حيث n عدد طبيعي و a_0 ، a_1 ، ... ، a_n أعداد حقيقية ثابتة.

✔ يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير حدود f.

وتسمى الأعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n معاملاته، ويسمى $a_p x^p$ الحد الذي درجته p.

✍ مثال :

❖ كل ثابتة : $x \mapsto a_0\,(a_0 \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 0

❖ كل دالة تآلفية : $x \mapsto ax + b\,(a \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 1

❖ كل دالة $x \to ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 2 (تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية).

2 تســـاوي كثيري حدود

يكون كثيرا حدود، غير معدومين متساويين إذا وفقط إذا كانا من نفس الدرجة وكانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

✍ مثال : إذا كان لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - x + 3$ فإن $a = 2$ ، $b = 0$ ، $c = -1$ ، $d = 3$.

3 العمليات على كثيرات الحدود

❖ مجموع فرق وجداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود

❖ مركب كثيري حدود هو كثير حدود

❖ جداء كثيري حدود هو كثير حدود درجته مجموع درجتيهما.

4 جذر كثير حدود

f كثير حدود درجته أكبر من أوتساوي 1 و α عدد حقيقي، α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha) = 0$

5 تحليل كثير حدود

ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أوتساوي 1 و α عدد حقيقي.

إذا كان $f(\alpha) = 0$ فإنه يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f(x) = (x - \alpha)g(x)$

مـــثـــال : الهدف هو تحليل $f(x)$ إلى جداء عاملين أو أكثر بطرق مختلفة. حيث $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ &= x^2(x-1) - 4(x-1) \\ &= (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

نبين أن 1 جذر لـ f ثم نستعمل المبرهنة السابقة ، و منه

$$f(x)a = (x-1)(ax^2+bx+c)$$
$$= ax^3 + (c-a)x^2 + (c-b)x - c$$

بالمطابقة نجد : $a=1$ ، $b=0$ ، $c=-4$.

ومنه : $f(x) = (x-1)(x^2-4)$ أي : $f(x) = (x-1)(x+2)(x-2)$

القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x + 4 & x-1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2 - 4 \\ \hline -4x + 4 & \\ 4x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

طريقة هورنر

	x^3	$-x^2$	$-4x$	$+4$
	1	−1	−4	4
1	0	1	0	−4
×	1	0	−4	0

(+)

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$
$$= (x-1)(x^2-4)$$

6 معـادلة من الدرجة الثانية

نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: ax^2+bx+c حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

7 الشكل النموذجي لثلاثي الحدود

$$A = ax^2+bx+c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

نضع $\Delta = b^2-4ac$ ومنه فإن الشكل النموذجي لثلاثي الحدود هو

$$A = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

8 حل معـــادلة من الدرجة الثانية

حل معادلة من الدرجة الثانية معناه إيجاد جذور كثير حدود من الدرجة الثانية

إذا كان	حلول ax^2+bx+c هي	تحليل ax^2+bx+c
$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$a(x-x_1)^2$
$\Delta < 0$	لا توجد حلول	لا يمكن التحليل

9 متراجحة من الدرجة الثانية

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية ذات المجهول x كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين:

$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geq 0$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$

الحالة ❶ : $\Delta > 0$ لدينا

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ بفرض $x_1 < x_2$ نحصل على الجدول التالي:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
إشارة $x-x_1$		−	0	+		+	
إشارة $x-x_2$		−		−	0	+	
إشارة $f(x)$		إشارة a	0	-a إشارة	0	إشارة a	

الحالة ❷ : $\Delta = 0$

لدينا $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ حيث $x_1 = \frac{-b}{2a}$ ، ومنه إشارة ax^2+bx+c من إشارة a ويمكن تلخيصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
إشارة $f(x)$		إشارة a	0	إشارة a	

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الحالة ❸ : $\Delta < 0$

إشارة ax^2+bx+c يمكن تلخيصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
إشارة $f(x)$	إشارة a

10 مجموع وجداء حلي معـــادلة

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية: (1) $\quad ax^2+bx+c$ مع $(a \neq 0)$

نعلم أنه إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين هما x_1 وx_2 حيث

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

إذا وضعنا $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 \times x_2$ حيث S هو مجموع الحلين وP هو جداؤهما فإن

$$S = -\frac{b}{a} \text{ و } P = \frac{c}{a}$$

1.10 حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين يمكن حساب الجذر الآخر وذلك باستعمال المجموع S والجداء P

2.10 تعيين عددين علم مجموعهما و جداؤهما

يكون مجموع عددين هو S وجداؤهما هو P إذا وفقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x والتي تكتب بالشكل التالي $x^2 - Sx + p$

3.10 تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية: (1) $\quad ax^2+bx+c$ مع $(a \neq 0)$

- ❖ إذا كان $\frac{c}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتاهما مختلفتان.
- ❖ إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما.
- ❖ إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماما.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

مثال تطبيقي :

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية

$$(m-1)x^2+2(m+1)x+m=0$$

الحل

لدينا : $p=\dfrac{m}{m-1}$ و $S=\dfrac{-2(m+1)}{m+1}$

❖ إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تصبح من الدرجة الأولى $4x+1=0$ ومنه $x=-\dfrac{1}{4}$.

❖ إذا كان $m\neq 1$ فإن المعادلة تصبح من الدرجة الثانية حيث: $\Delta_m=4(3m+1)$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Δ_m		$-$	0	$+$		$+$	

دراسة إشارة P و S

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-2m-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
S		$-$		$+$		$-$	

m	$-\infty$		0		1		$+\infty$
m		$-$	0	$+$		$+$	
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
P		$+$		$-$		$+$	

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
Δ_m		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
S_m		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$-$	
P_m		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$+$	
النتائج	المعادلة لا تقبل حلول				المعادلة تقبل حلين موجبين تماما 0		المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة 0			المعادلة تقبل حلين سالبين تماما	

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

11 المعادلات مضاعفة التربيع

نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4+bx^2+c=0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

حل هذه المعادلة يؤول إلى حل الجملة :

$$\begin{cases} X=x^2 \\ aX^2+bX+c \end{cases}$$

يسمى X مجهولا مساعدا

بعد حل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ نستنتج حلول المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$

12 المتراجحات مضاعفة التربيع

نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4+bx^2+c\geq 0$ أو $ax^4+bx^2+c>0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

يؤول إلى حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة ax^4+bx^2+c

مثال :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^4-7x^2+12\leq 0$

① نضع : $f(x)=x^4-7x^2+12$

التحقق أن 3 و 4 حلان المعادلة $X^2-7X+12=0$

بتعويض قيمة X بـ 3 و 4 نجد : $(3)^2-7(3)+12=0$ و $(4)^2-7(4)+12=0$

② لدينا :

$$\begin{aligned} f(x)&=x^4-7x^2+12 \\ &=X^2-7X+12 \\ &=(X-3)(X-4) \\ &=(x^2-3)(x^2-4) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
x^2-3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

من الجدول نستنتج أن حلول المتراجحة $f(x)<0$ هي : $S=]-2;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};2[$.

13 حلول معادلات و متراجحات من الشكل $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ، $ax^3+bx^2+cx+d\geq 0$

للحلول معادلات و متراجحات من الشكل $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ، $ax^3+bx^2+cx+d\geq 0$ نقوم بتحليل العبارة بإحدى طرائق السابقة (مع جذر معلوم) ثم نحل المعادلة أو المتراجحة

مثال

لدينا : $P(x)=2x^3-x^2-13x-6$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

1. حساب $P(-2)$:

$$P(-2) = 2(-2)^3 - (-2)^2 - 13(-2) - 6$$
$$= 2 \times (-8) - 4 + 26 - 6 = -16 - 4 - 6 + 26 = 0$$

ومنه $P(-2) = 0$

2. أ) نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $P(x) = (x+2)Q(x)$ بما أنّ $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة و -2 جذر له

فإنه يكتب على الشكل : $P(x) = (x+2)Q(x)$

تعيين $Q(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 13x - 6 & x+2 \\ \hline -2x^3 - 4x^2 & 2x^2 - 5x - 3 \\ \hline -5x^2 - 13x & \\ 5x^2 + 10x & \\ \hline -3x - 6 & \\ 3x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه : $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$

ب) استنتاج تحليل لـ $P(x)$ على شكل جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى:

لدينا $P(x) = (x+2)Q(x)$ نحل المعادلة $Q(x) = 0$:

$$Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$$
$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3)$$
$$= 25 + 25 = 49 > 0$$

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

إذن $Q(x) = 2(x+\frac{1}{2})(x-3)$ ومنه $P(x) = 2(x+2)(x+\frac{1}{2})(x-3)$

3. حل المتراجحة $P(x) \geqslant 0$ في $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-2		$\frac{-1}{2}$		3	$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0

وبالتالي حلول المتراجحة $P(x) \geqslant 0$ في $\mathbb{R}$ هي $x \in [-2; \frac{-1}{2}] \cup [3; +\infty[$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

14 حل معادلات عن طريق الإستنتاج

لدينا مما سبق حلول المعادلة : $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$ هي : 2 ، 3 و $-\frac{1}{2}$

✍ لحل المعادلة : $2x^6 - x^4 - 13x^2 - 6 = 0 \cdots (1)$ نقوم بوضع : $X = x$

إذن (1) تكافئ $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \cdots (2)$ ولدينا مماسبق

$$\begin{cases} X = 1 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1 \\ X = 3 \Longrightarrow x^2 = 3 \Longrightarrow x = \sqrt{3} \text{و} x = -\sqrt{3} \\ X = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \text{مرفوض} \end{cases}$$

✍ لحل المعادلة : $2x\sqrt{x} - x - 13\sqrt{x} - 6 = 0 \cdots (1)$ نقوم بوضع : $X = \sqrt{x}$ بحيث $x \geq 0$

إذن (1) تكافئ $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \cdots (2)$ ولدينا مماسبق

$$\begin{cases} X = 1 \Longrightarrow \sqrt{x} = 1 \Longrightarrow x = 1 \\ X = 3 \Longrightarrow \sqrt{x} = 3 \Longrightarrow x = 9 \\ X = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \sqrt{x} = -\frac{1}{2} \text{مرفوض} \end{cases}$$

✍ لحل المعادلة : $\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{13}{x} - 6 = 0 \cdots (1)$ نقوم بوضع : $X = \frac{1}{x}$ بحيث $x \neq 0$

إذن (1) تكافئ $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \cdots (2)$ ولدينا مماسبق

$$\begin{cases} X = 1 \Longrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Longrightarrow x = 1 \\ X = 3 \Longrightarrow \frac{1}{x} = 3 \Longrightarrow x = \frac{1}{3} \\ X = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = -2 \end{cases}$$

✍ بعبارة أخرى لحلول معادلة من الشكل : $3f(x)^3 - f(x)^2 - 13f(x) - 6 = 0 \cdots (1)$ نقوم بوضع : $X = f(x)$ حيث $x \in D_f$

إذن (1) تكافئ $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \cdots (2)$ ولدينا مماسبق

$$\begin{cases} X = 1 \Longrightarrow f(x) = 1 \Longrightarrow \cdots \\ X = 3 \Longrightarrow f(x) = 3 \Longrightarrow \cdots \\ X = -\frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \cdots \end{cases}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

15 تطبيقات

التمرين رقم (1): ليكن P كثير حدود حيث $P(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x - 3$.

1. تحقق أن $\alpha = 1$ جذر لكثير الحدود $P(x)$.
2. عين كثير الحدود $q(x)$ حيث من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $P(x) = (x-1)q(x)$.
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.
4. شكل جدول إشارة $P(x)$ ثم استنتج حلول المتراجحة $-4x^2 + 3x + 4 \leq \frac{3}{x}$.

الحل موجود في الصفحة 14

التمرين رقم (2): نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m

$$(m^2-4)x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$$

1. عين قيم العدد الحقيقي m حتى تكون المعادلة (E) من الدرجة الثانية.
2. عين قيمة m حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E) ثم استنتج الحل الآخر لها.

الحل موجود في الصفحة 14

التمرين رقم (3): نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث : $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

1. أثبت أن (-1) هو جذر لـ $P(x)$.
2. أوجد كثير الحدود $Q(x)$ حيث : $f(x) = (x+1)Q(x)$.
3. أدرس حسب قيم x إشارة $P(x)$ ، ثم استنتج حلول المتراجحة $P(x) > 0$.

الحل موجود في الصفحة 15

التمرين رقم (4): f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$ ، حيث α و β عددان حقيقيان.

1. عين العددين α و β حتى يكون (-1) جذرا لكثير الحدود $f(x)$ و $f(0) = 2$.
2. نعتبر فيما يلي : $\alpha = -1$ و $\beta = 2$:

ا) أوجد كثير حدود $g(x)$ حيث : $f(x) = (x+1)g(x)$.

ب) حل في $\mathbb{R}$ ما يلي : $f(x) = 0$ و $f(x) > 0$.

الحل موجود في الصفحة 16

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

التمرين رقم (5): نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_m(x) = x^2 - mx + 1$ حيث m وسيط حقيقي ، وليكن (C_m) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل.
2. عيّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متمايزتين.
3. عيّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) لا يقطع حامل محور الفواصل.
4. عيّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) يشمل النقطة $A(2,-3)$.

الحل موجود في الصفحة 17

التمرين رقم (6): نعتبر المعادلة : $x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0 \cdots (1)$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

① $x^2 + x - 3 = 0$ ② $x^2 + x + 2 = 0$ ④ $x^2 + 3x - 4 = 0$

2) أثبت أن المعادلة (1) تكافئ المعادلة $(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0 \cdots (2)$

3) إستنتج حلول المعادلة (2)

4) حل المتراجحة $\dfrac{x^4 + 2x^3 - x - 6}{x} \leq 0$

الحل موجود في الصفحة 18

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

16 تمارين للمحاولة

تمرين 1 :

لتكن المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x : $(E)\cdots x^2-(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}-2=0$

1. أثبت أنّ المميز: $\Delta=(3-\sqrt{3})^2$، ثم استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين: α و β (حسابهما غير مطلوب).
2. أحسب $\alpha^2+\beta^2$ دون حساب α و β.
3. (أ) تحقق من أنّ $\alpha=2$ هو حل للمعادلة (E) ثم استنتج قيمة β الحل الآخر للمعادلة (E).

(ب) حلل ثلاثي الحدود $P(x)$ حيث : $P(x)=x^2-(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}-2$، ثم ادرس اشارته.

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $x^2-(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}-2<0$

(د) حل في $\mathbb{R}$ الجملة ذات المجهولين a و b : $\begin{cases}a+b=\sqrt{3}+1\\ab=2\sqrt{3}-2\end{cases}$

تمرين 2 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

1. احسب $f(3)$ ثم استنتج تحليلا لـ $f(x)$ إلى جداء عاملين.
2. حل في $\mathbb{R}$ ما يلي: $f(x)=0$ ؛ $f(x)<0$
3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\dfrac{2x^4-10x^2+8}{x^2+x-2}\geq 0$.

تمرين 3 :

ليكن $f_m(x)$ كثير حدود لمتغير x حيث : $f_m(x)=(m-2)x^2-(m+1)x+m-2$

1. أحسب $f_0(0)$ و $f_2(-1)$.
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: $f_1(x)=0$ و $f_2(x)=0$.
3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية: $f_1(x)\geq 0$ و $f_2(x)\leq 0$.
4. عين قيم m حتى يكون $x_1=1$ حل للمعادلة $f_m(x)=0$ ثم استنتج الحل الثاني x_2.
5. عين قيم m في كل حالة من الحالات التالية:

(أ) $f_m(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

(ب) المعادلة $f_m(x)=0$ لاتقبل حلول.

(ج) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حل مضاعف .

(د) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلين متمايزين .

(هـ) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حل وحيد.

(و) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلين مختلفين في الاشارة.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

(ز) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلين متناظرين.

تمرين 4 :

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x: $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0....(1)$

1. بين أن 0 ليس حلا للمعادلة (1).
2. بين أنه يمكن كتابة المعادلة (1) على الشكل:
$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0....(2)$$
3. بوضع: $u=x+\frac{1}{x}$، أحسب u^2 بدلالة x.
4. بين أن المعادلة (2) تكتب على الشكل $6u^2-5u-50=0....(3)$
5. حل المعادلة (3) ثم استنتج حلول المعادلة (1).

تمرين 5 :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ كثير الحدود $P(x)$ المعرف بـ: $P(x)=x^3-4x^2+5x-2$.

1. أحسب $P(1)$، ماذا نستنتج
2. أوجد كثير الحدود $Q(x)$ حيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $P(x)=(x-1)Q(x)$
3. حلل كثير الحدود $P(x)$ إلى جداء عوامل. ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$
4. استنتج حلول المعادلة: $|x-1|-4(x-1)^2+5|x-1|-2=0$.
5. نضع : $g(x)=\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2+x-2}$.

(أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2+x-2=0$

(ب) عين قيم العدد الحقيقي x بحيث يكون للعبارة $g(x)$ معنى.

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $g(x)\le 0$.

تمرين 6 :

$P(x)$ كثير حدود و α عدد حقيقي حيث : $P(x)=x^3-(6+\alpha)x^2+(13-\alpha)x-(\alpha-14)$.

I) عين العدد α حتى يكون 3 جذر لكثير الحدود $P(x)$

II) نضع $\alpha=2$ أي : $P(x)=x^3-8x^2+11x+12$.

1. عين الأعداد الحقيقية a b و c بحيث : $P(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$.
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.
3. استنتج حلول المعادلة : $x\sqrt{x}-8x+11\sqrt{x}+12=0$.
4. استنتج حلول المعادلة : $P(x)=\left(\frac{x-1}{2}\right)^3-8\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+11\left(\frac{x-1}{2}\right)+12=0$.
5. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x)\le 0$ ثم استنتج إشارة $P\left(\frac{2021}{2022}\right)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

تمرين 7 :

نعتبر كثير الحدود $P_m(x)$ حيث: $P_m(x)=(m^2-4)x^4+(m+1)x^3-(2+m)x^2-\frac{5}{2}mx+2=0$

1. عين قيم m حتى يكون $P_m(x)$ من الدرجة الثالثة .
2. تحقق أن 2 جذر لكثير الحدود $P_2(x)$
3. عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث : $P_2(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$
4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $3x^2+2x-1=0$

   استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة $P_2(x)=0$
5. أدرس إشارة $P_2(x)$ ثم استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة : $3x^3+2\leq 4x^2+5x$

LaTeX
27/10/2021
16:43:00
صفحة الأستاذ وليد لعريجي مادة الرياضيات
najah213.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

17 الحلـــــول

حل التمرين رقم (1) الموجود في الصفحة 9:

1. التحقق أن $\alpha = 1$ جذر لكثير الحدود $P(x)$

$P(1) = -4(1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) - 3 = -4 + 3 + 4 - 3 = 0$ ومنه: $\boxed{P(1) = 0}$

2. تعيين كثير الحدود $q(x)$

لدينا $P(x) = (x-1)q(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

بالمطابقة نجد :
$$\begin{cases} a = -4 \\ b - a = 3 \\ c - b = 4 \\ -c = -3 \end{cases}$$

إذن : $\boxed{a = -4}$ و $\boxed{b = -1}$ و $\boxed{c = 3}$

وبالتالي $\boxed{P(x) = (x-1)(-4x^2 - x + 3)}$.

3. حل المعادلة $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

$P(x) = 0$ معناه $(x-1)(-4x^2 - x + 3) = 0$ يكافئ
$$\begin{cases} x - 1 = 0 \quad (1) \\ \text{أو} \\ -4x^2 - x + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

يكافئ
$$\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ -4x^2 - x + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

4. حل المعادلة (2) :

لدينا : $\Delta = 49 > 0$ ومنه للمعادلة (2) حلين هما : $\boxed{x_2 = -1}$ و $\boxed{x_3 = \frac{3}{4}}$

ومنه حلول المعادلة $P(x) = 0$ هي $\boxed{x_2 = 1}$ و $\boxed{x_2 = -1}$ و $\boxed{x_3 = \frac{3}{4}}$

حل التمرين رقم (2) الموجود في الصفحة 9:

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x والوسيط m : $(m^2 - 4)x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$

✍ حتى تكون المعالة (E) من الدرجة الثانية، يجب أن يكون $m^2 - 4 \neq 0$

معناه $m^2 \neq 4$ يكافئ $m \neq 2$ أو $m \neq -2$ إذن $\boxed{m \in]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

② تعيين قيمة m حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E):

لدينا $m^2-2m+1=0$ يكافئ $(m^2-4)(0)^2-2m\times(0)+m^2-2m+1=0$

يكافئ $(m-1)^2=0$ إذن للمعادلة $m^2-2m+1=0$ حل مضاعف هو $\boxed{m=1}$

تعين الحل الآخر للمعادلة (E) من أجل $m=1$

من أجل $m=1$ في المعادلة (E) لدينا : $-3x^2-2x=0$ معناه : $x(-3x-2)=0$

يكافئ : $\begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ -3x-2=0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

حل التمرين رقم (3) الموجود في الصفحة 9:

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث: $P(x)=x^3-3x^2-x+3$.

1. إثبات أن (-1) جذر لـ $P(x)$:

$$P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-(-1)+3$$
$$=-1-3+1+3=0$$

2. تعيين كثير الحدود $Q(x)$ حيث : $P(x)=(x+1)Q(x)$:

باستعمال القسمة الإقليدية نجد :

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2 \quad -x+3 & x+1 \\ \hline -x^3 \quad -x^2 & x^2-4x+3 \\ \hline -4x^2 \quad -x & \\ 4x^2+4x & \\ \hline 3x+3 & \\ -3x-3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه $Q(x)=x^2-4x+3$.

3. دراسة إشارة $P(x)$ حسب قيم x :

$P(x)=0$ معناه $(x+1)Q(x)=0$ أي $x+1=0$ (نعلم أن (-1) جذر لـ $P(x)$) ، و $Q(x)=0$: $Q(x)=x^2-4x+3=0$

باستعمال المميز Δ :

$$\Delta=(-4)^2-4\times3$$
$$=16-12=4>0$$

$$x_1=\frac{4-2}{2}=1$$
$$x_2=\frac{4+2}{2}=3$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ومنه :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- استنتاج مجموعة التعريف D_k للدالة k المعرفة بـ: $k(x)=\sqrt{P(x)}$:

يكافئ $P(x)\geq 0$ ومن جدول الاشارة السابق نجد : $x\in[-1;1]\cup[3;+\infty[$.

حل التمرين رقم (4) الموجود في الصفحة 9:

1. تعيين العددين α و β حتى يكون (-1) جذرا لكثير الحدود $f(x)$ و $f(0)=2$:

(-1) جذر لكثير الحدود $f(x)$ معناه:

$$f(-1)=(-1)^3-2(-1)^2+\alpha(-1)+\beta$$
$$=-1-2-\alpha+\beta$$
$$=-3-\alpha+\beta=0$$

إذن : $\beta-\alpha=3$ (1)

لدينا $f(0)=2$ معناه : $f(0)=0^3-2\times 0^2+\alpha\times 0+\beta=2$ ومنه $\beta=2$ (2)

بتعويض (2) في (1) نجد $\alpha=\beta-3$ أي $\alpha=2-3$

ومنه $\alpha=-1$ وبالتالي : $f(x)=x^3-2x^2-x+2$.

2. نعتبر فيما يلي : $\alpha=-1$ و $\beta=2$:

أ) ايجاد كثير حدود $g(x)$ حيث : $f(x)=(x+1)g(x)$:

$f(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة و (-1) جذر له ، إذن يقبل تفكيكًا من الشكل : $f(x)=(x+1)g(x)$.

باجراء القسمة الاقليدية نجد :

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-x+2 & x+1 \\ \hline -x^3-x^2 & x^2-3x+2 \\ \hline -3x^2-x & \\ 3x^2+3x & \\ \hline 2x+2 & \\ -2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ومنه : $f(x) = (x+1)(x^2-3x+2)$

ب) نحل في $\mathbb{R}$ ما يلي : $f(x) = 0$ و $f(x) > 0$

$f(x) = 0$ معناه $(x+1)g(x) = 0$ أي $x+1 = 0$ (نعلم أن (-1) جذر لـ $f(x)$) ، و $g(x) = 0$:

$g(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ باستعمال المميز Δ :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2$$
$$= 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

إذن : $S_{f(x)} = \{-1;1;2\}$

حل المتراجحة $f(x) > 0$ في $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة $f(x) > 0$ في $\mathbb{R}$ هي $x \in]-1;1[\cup]2;+\infty[$

حل التمرين رقم (5) الموجود في الصفحة 10 :

1. تعيين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل.

لدينا : $f_2(x) = x^2 - 2x + 1$ فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة $f_2(x) = 0$ ومنه :

$x^2 - 2x + 1 = 0$ يكافئ $(x-1)^2 = 0$ أي $x = 1$ وبالتالي : $(C_2) \cap (xx') = \{(1,0)\}$.

2. تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متمايزتين.

معناه أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلين متمايزين في $\mathbb{R}$.

نحل المعادلة : $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$.

$\Delta_m = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$m-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Δ_m		$+$	0	$-$	0	$+$	

المعادلة : $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ تقبل حليّن متمايزيين لمّا $\Delta_m > 0$ أي: $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

3. تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) لا يقطع حامل محور الفواصل.

معناه أن المعادلة : $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ يكافئ $\Delta_m < 0$ أي $m \in]-2, 2[$.

4. تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) يشمل النقطة $A(2, -3)$.

$A(2, -3) \in (C_m)$ يكافئ $f_m(2) = -3$ ومنه $4 - 2m + 1 = -3$ أي $m = 4$.

حل التمرين رقم (6) الموجود في الصفحة 10 :

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0 \cdots (1)$$

1. حل المعادلات :

$x^2 + x - 3 = 0$

حساب Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (1)^2 - 4(1)(-3)$

$\Delta = 13$

$\Delta > 0$ إذا للمعادلة حلان مختلفان هما

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2}$

$x^2 + x + 2 = 0$

حساب Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (1)^2 - 4(1)(2)$

$\Delta = -7$

$\Delta < 0$ إذا المعادلة ليس لها حل

$x^2 + 3x - 4 = 0$

حساب Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (3)^2 - 4(1)(-4)$

$\Delta = 25$

$\Delta > 0$ إذا للمعادلة حلان مختلفان هما

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{-3 - \sqrt{25}}{2}$

$x_1 = -4$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{-1 + \sqrt{25}}{2}$

$x_2 = 1$

2. إثبات أن المعادلة (2) تكافئ المعادلة (1):

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$(x^2+x-2)^2+3(x^2+x-2)-4=0\cdots(2)$$

$$(x^2+x-2)^2+3(x^2+x-2)-4=0$$
$$((x^2+x)-2)^2+3(x^2+x-2)-4=0$$
$$((x^2+x)^2+(2)^2-2(x^2+x)(2)+3x^2+3x-6-4=0$$
$$x^4+x^2+2x^3+4-4x^2-4x+3x^2+3x-6-4=0$$
$$x^4+x^2+2x^3+4-4x^2-4x+3x^2+3x-6-4=0$$
$$x^4+2x^3-x-6=0$$

3. إستنتاج حلول المعادلة (2):

بوضع $X=x^2+x-2$ المعادلة (2) تكافئ المعادلة : $X^2+3X-4=0$ و عليه :

لما $X=-4$ نجد $x^2+x-2=-4$ أي $x^2+x+2=0$ و من السؤال 1 نجد أن المعادلة لا تقبل حل.

لما $X=1$ نجد $x^2+x-2=1$ أي $x^2+x-3=0$ و من السؤال 1 نجد حلول المعادلة هما :

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

ومنه : $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

4. حل المتراجحة :

بما أن $x^4+2x^3-x-6=(x^2+x-2)^2+3(x^2+x-2)-4$ نجد أن

$$x^4+2x^3-x-6=(x^2+x-2+4)(x^2+x-2-1)$$
$$=(x^2+x+2)(x^2+x-3)$$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
x^2+x+2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2+x-3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^4+2x^3-x-6		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$-$		$+$		$+$	
$\frac{x^4+2x^3-x-6}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$		$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة هي : $x\in\left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right[\cup\left]0;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com