# العبقري في الرياضيات

## الدوال العددية

## الثالثة ثانوي

الشعب: ● تسيير وإقتصاد.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213



# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية)
# الملخص // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

## ملخص: حول الدّوال العددية// التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: تسيير وإ.

## 1 المستقيمات المقاربة:

| المستقيم المقارب | النهاية | التفسير الهندسي |
|---|---|---|
| ① العمودي | $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ | المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = a}$ **(المُوازي لمحور التراتيب)** مقارب لـ$(C_f)$. |
| ② الأفقي | $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = b$ | المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = b}$ **(المُوازي لمحور الفواصل)** مقارب لـ$(C_f)$ عند $\infty$. |
| ③ المائل | $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ | المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = ax + b}$ مقارب **مائل** لـ$(C_f)$ عند $\infty$. |

**ملاحظة: إذا كان:** $\begin{cases} f(x) = ax + b + g(x) \\ \lim\limits_{x\to \infty} g(x) = 0 \end{cases}$،

**فإنّ:** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = ax + b}$ مقارب **مائل** لـ$(C_f)$ عند $\infty$.

## 2 الدّالة الزوجية، والدّالة الفردية:

| الدّالة $f$ | معناه | ويكون |
|---|---|---|
| ① الزوجية | 1) $D_f$ **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر** (**أي:** من أجل كل $x$ من $D_f$، فإنّ $-x$ من $D_f$) <br> 2) $\boxed{f(-x) = f(x)}$. | منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **محور التراتيب**. |
| ② الفردية | 1) $D_f$ **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر** (**أي:** من أجل كل $x$ من $D_f$، فإنّ $-x$ من $D_f$) <br> 2) $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ **أو** $\boxed{f(-x) + f(x) = 0}$. | منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **مبدأ المعلم**. |

## 3 مركز التناظر، ومحور التناظر:

| | |
|---|---|
| ① محور التناظر | المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = \alpha}$ **محور تناظر** للمنحنى $(C_f)$، **معناه:** <br> $\boxed{f(2\alpha - x) = f(x)}$ **أو** $\boxed{f(\alpha - x) = f(\alpha + x)}$. |
| ② مركز التناظر | النقطة $\boxed{\omega(\alpha;\beta)}$ **مركز تناظر** للمنحنى $(C_f)$، **معناه:** <br> $\boxed{f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta}$ **أو** $\boxed{f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta}$. |



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213



## 4 تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب، ومع حامل محور الفواصل:

| ☞ | الطريقة | ونكتب |
|---|---|---|
| ①تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب $(yy')$ | ▪ نحسب $\boxed{f(0)}$. | $(C_f) \cap (yy') = \{A(0; \dots)\}$ |
| ②تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل $(xx')$ | ▪ نحل المعادلة $\boxed{f(x) = 0}$ في $D_f$. | $(C_f) \cap (xx') = \{A(\dots; 0); B(\dots; 0)\}$ |

## 5 المماس:

هناك سِتُّ (06) صيغ -تقريباً- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى **معرفة فاصلة نقطة التّماس $x_0$ هي المفتاح للإجابة** على أي منها كما سنرى:

| الصيغة ☞ | الطـــــرح | كيفية الإجابة |
|---|---|---|
| **الصيغة الأولى (العادية)** | اكتب معادلة المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$. | نكتب الدستور: $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ حيث نعوض $x_0$ بقيمتها المُعطاة. |
| **الصيغة الثانية** | اكتب معادلة المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الترتيب $y_0$. | نحلّ المعادلة $\boxed{f(x_0) = y_0}$، وعند تعيين قيمة $x_0$ نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). |
| **الصيغة الثالثة** | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ **ميله (أو معامل توجيهه)** يساوي $\alpha$. | نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0) = \alpha}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) $x_0$ نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).<br>**ملاحظة:** عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات. |
| **الصيغة الرابعة** | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ **يُوازي** المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$. | نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0) = \alpha}$، عُدنا إلى الحالة الثانية.<br>**ملاحظة:** مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه. |
| **الصيغة الخامسة** | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ **يُعامد** المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$. | نحلّ المعادلة $\boxed{\alpha \times f'(x_0) = -1}$.<br>**ملاحظة:** مستقيمان متعامدان، جداء معاملي توجيههما يساوي $(-1)$. |
| **الصيغة السادسة** | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ **يشمل** النقطة ذات الإحداثيي $(x_M; y_M)$. | نحلّ المعادلة $\boxed{y_M = f'(x_0)(x_M - x_0) + f(x_0)}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) $x_0$ نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). |

## 6 وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta): ax + b$:

| الطريقة ☞ | إشارة الفرق | الوضعية النسبية |
|---|---|---|
| **ندرس إشارة الفرق** $f(x) - (ax + b)$ | ▪ $f(x) - (ax + b) > 0$<br>▪ $f(x) - (ax + b) < 0$<br>▪ $f(x) - (ax + b) = 0$ | ▪ $(C_f)$ يقع **فوق** $(\Delta)$.<br>▪ $(C_f)$ يقع **تحت** $(\Delta)$.<br>▪ $(C_f)$ **يقطع** $(\Delta)$. |



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# 7 النهايات:

**أ) حالات <<عدم التعيين>> (د ع ت):**

| توجد ؟ | الجمع | الجداء | حاصل القسمة | |
|---|---|---|---|---|
| أربع (04) أشكال | $(+\infty)+(-\infty)$ والعكس | $0\times\infty$ والعكس | $\frac{\infty}{\infty}$ | $\frac{0}{0}$ |

**ب) نهاية #دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$:**

- **النهاية** عند $+\infty$ وَعند $-\infty$ لدّالة كثير حدود هي **نهاية حدها الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.

| $f(x)=x^3+x-2$ | $g(x)=x^2-2x^3+1$ |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3)$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3)$ |

**جـ) نهاية #دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$:**

- **النهاية** عند $+\infty$ وَعند $-\infty$ لدّالة ناطقة هي **نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.
- **لحساب نهايات #دالة ناطقة** عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها؛ **نتذكّر أنّ:** $\boxed{\frac{l}{0}=\infty}$ **ويُحدّد بدراسة إشارة المقام** على اليمين واليسار **وحسب** مجموعة التعريف.

| المقام من الشكل/ حيث | $n$ فردي | $n$ زوجي |
|---|---|---|
| $x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ | **إشارة $x^n$ من إشارة $x$** **النهاية عند 0** $\lim\limits_{x\to0^<}\frac{l}{x^n}$ $\left(\frac{l}{0^-}\right)$ وَ $\lim\limits_{x\to0^>}\frac{l}{x^n}$ $\left(\frac{l}{0^+}\right)$ | **إشارة $x^n$ موجب** $(x^n\geq0)$ **النهاية عند 0** $\lim\limits_{x\to0}\frac{l}{x^n}$ $\left(\frac{l}{0^+}\right)$ |
| $(ax+b)^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ | **إشارة $(ax+b)^n$ من إشارة $(ax+b)$** **النهاية عند $-\frac{b}{a}$:** $\lim\limits_{x\to-\frac{b}{a}^<}\frac{l}{(ax+b)^n}$ $\left(\frac{l}{0^{a\text{ عكس إشارة}}}\right)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\frac{b}{a}^>}\frac{l}{(ax+b)^n}$ $\left(\frac{l}{0^{a\text{ عكس إشارة}}}\right)$ | **إشارة $(ax+b)^n$ موجب** $(ax+b)^n\geq0$ **النهاية عند $-\frac{b}{a}$:** $\lim\limits_{x\to-\frac{b}{a}}\frac{l}{(ax+b)^n}$ $\left(\frac{l}{0^+}\right)$ |
| $ax^2+bx+c$ | **ندرس إشارة $ax^2+bx+c$ باستعمال المميز** $\Delta=b^2-4ac$ | |

**جـ) إشارة $ax+b$ $(a\neq0)$:**

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax+b$ | **عكس** إشارة $a$ | 0 | **مثل** إشارة $a$ |



www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية) الملخص ـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــ

ج) إشارة $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

| تحليل $P(x)$ | إشارة $P(x)$ | حلول المعادلة $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ | المـــــــــميز $\Delta = b^2 - 4ac$ |
|---|---|---|---|
| لا يُمكن تحليل $P(x)$ | $x$ \| $-\infty$ $+\infty$<br>$P(x)$ \| مثل إشارة $a$ | $S = \emptyset$ | $\Delta < 0$ |
| $P(x) = a(x - x_0)^2$<br>$(x_0 = -\frac{b}{2a})$ | $x$ \| $-\infty$ $-\frac{b}{2a}$ $+\infty$<br>$P(x)$ \| مثل إشارة $a$ ○ مثل إشارة $a$ | $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ | $\Delta = 0$ |
| $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ | $x$ \| $-\infty$ $x_1$ $x_2$ $+\infty$<br>$P(x)$ \| مثل إشارة $a$ ○ عكس إشارة $a$ ○ مثل إشارة $a$<br>**(نفرض أنّ $x_1 < x_2$)** | $S = \{x_1; x_2\}$<br>**حيث:**<br>$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$<br>$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $\Delta > 0$ |

## 8 الإشتقاقية:

### أ. مشتقات دوال مألوفة:

| مجالات قابلية الاشتقاق | $f'(x) =$ | $f(x) =$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $0$ | $(k \in \mathbb{R})\ k$ |
| $\mathbb{R}$ | $1$ | $x$ |
| $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ | $(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})\ x^n$ |
| $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\frac{1}{x}$ |
| $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ | $(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{x^n}$ |
| $]0; +\infty[$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\sqrt{x}$ |
| $\mathbb{R}$ | $-sinx$ | $cosx$ |
| $\mathbb{R}$ | $cosx$ | $sinx$ |

### ب. المشتقات والعمليات على الدوال:

$u$ و $v$ دّالتان **قابلتان للاشتقاق** على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $k$ عدد حقيقي.

| الدّالة | $u + v$ | $ku$ | $uv$ | $\frac{1}{v}$ | $\frac{u}{v}$ ( الدّالة $v$ **لا تنعدم** على $I$ ) |
|---|---|---|---|---|---|
| **المشتقة** | $u' + v'$ | $ku'$ | $u'v + v'u$ | $\frac{-v'}{v}$ | $\frac{u'v - v'u}{v^2}$ |

**نتائج:**

- الدّوال **كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$.
- الدّوال **الناطقة قابلة للاشتقاق** على **كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها**.

### ج. الاشتقاقية والاستمرارية:

إذا كانت $f$ **قابلة للاشتقاق** على مجال $I$، فإنّـــها **مستمرة** على هذا المجال **وعكس هذه الخاصية ليس صحيح.**

**إشتقاق دالة مركبة:**



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

**أ. مشتقة الدّالة $v \circ u$:** $\boxed{(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]}$

**ب. تطبيقات:**

**مشتقة الدّالة** $x \mapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0)$

| $f(x) = u(ax+b)$ | $f'(x) = au'(ax+b)$ |
|---|---|

**مشتقة الدّالة** $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

| $f(x) = \sqrt{u(x)}$ | $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ |
|---|---|

**مشتقة الدّالة** $x \mapsto [u(x)]^n$ $(n$ **عدد طبيعي يحقق** $n \geq 2)$

| $f(x) = [u(x)]^n$ | $f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$ |
|---|---|

**مشتقة الدّالة** $x \mapsto \dfrac{1}{[u(x)]^n}$ $(n$ **عدد طبيعي يحقق** $n \geq 1)$

| $f(x) = \dfrac{1}{[u(x)]^n}$ | $f'(x) = \dfrac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$ |
|---|---|

## 9 الإستمرارية:

$f$ دالّة **معرّفة** على مجال $I$ من $\mathbb{R}$، إذا كانت $f$ **مستمرة على** $I$ فإنّ **تفسيرها البياني (أو الهندسي)** هو: أنّه **يُمكن رسم منحناها البياني على** $I$ **دون رفع القلم (اليد)**.

**نتائـــــج:**

- الدّوال المرجعية **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- الدّوال كثيرات الحدود؛ "$cos$" و"$sin$" هي دّوال **مستمرة على** $\mathbb{R}$.
- الدّوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دّوال **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء وتركيب دّوال **مستمرة هي** دّوال **مستمرة**.

**مبرهنة القيم المتوسطة:**

| مبرهنة القيم المتوسطة (تُقبل دون برهان) | التفسير البياني (أو الهندسي) "لمبرهنة القيم المتوسطة" |
|---|---|
| ▪ **الحالة العامة** $(k \in \mathbb{R})$<br>إذا كانت $f$ دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي $k$ **محصور** بين $f(a)$ وَ$f(b)$،<br>فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$. | المنحنى $(C_f)$ **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = k}$ **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$. |
| ▪ **الحالة الخاصة** $(k = 0)$<br>إذا كانت $f$ دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$،<br>وكان $0$ **محصور** بين $f(a)$ وَ$f(b)$، أي: $f(a) \times f(b) < 0$<br>فـإنّ: المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$. | المنحنى $(C_f)$ **يقطع** حامل محور الفواصل **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$. |
| **وحدانية الحل** | |
| ▪ **الحالة العامة** $(k \in \mathbb{R})$<br>إذا كانت $f$ دّالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$،<br>من أجل كل عدد حقيقي $k$ **محصور** بين $f(a)$ وَ$f(b)$،<br>فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا وحيدا** $\alpha$ في المجال $[a;b]$. | المنحنى $(C_f)$ **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = k}$ **في نقطة واحدة فاصلتها** $\alpha$ في المجال $[a;b]$. |



www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

| | |
|---|---|
| ▪ **الحالة الخاصة** $(k=0)$<br>إذا كانت $f$ دالّة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، وكان $0$ **محصور** بين $f(a)$ وَ$f(b)$، أي: $f(a)\times f(b)<0$<br>فـإنّ: المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** $\alpha$ في المجال $[a;b]$. | المنحنى $(C_f)$ **يقطع** حامل محور الفواصل **في نقطة واحدة فاصلتها** $\alpha$ في المجال $[a;b]$. |

**طُرق اثبات "وُجود" حلول معادلة في مجال $[a;b]$ باستعمال "مبرهنة القيم المتوسطة"**

| الحالة العامة $(k\in\mathbb{R})$ | الحالة الخاصة $(k=0)$ |
|---|---|
| **1/**نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=k$ **(إن لم تُعطى لنا)**<br>**2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة $f$ على المجال $[a;b]$.<br>**3/نتحقّق** من أنّ $k$ **محصور** بين $f(a)$ وَ$f(b)$، **وذلك بعد حسابهما**. | **1/**نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=0$ **(إن لم تُعطى لنا)**<br>**2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة $f$ على المجال $[a;b]$.<br>**3/نتحقّق** من أنّ $\boxed{f(a)\times f(b)<0}$، **وذلك بعد حسابهما**. |

**ملاحظة:** تقبل المبرهنات السابقة عدة **تمديدات** في حالة الدّالة $f$ **مستمرة ورتيبة تماماً** على مجال **مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود** أو **غير محدود**. (في حالة المجال مفتوح نستعمل النهايات)

## 10 المناقشة البيانية:

- المعادلة من الشكل $f(x)=m$، $m$ وسيط حقيقي.
- المعادلة من الشكل $f(x)=ax+\boxed{m}$، $m$ وسيط حقيقي. ← **المناقشة مائلة** مُوازية للمستقيم ذو المعادلة $y=ax+\boxed{b}$.
- المعادلة من الشكل $f(x)=mx+b$، $m$ وسيط حقيقي. ← **المناقشة دورانية** حول النقطة $A(0;b)$.
- المعادلة من الشكل $f(x)=f(m)$، $m$ وسيط حقيقي.

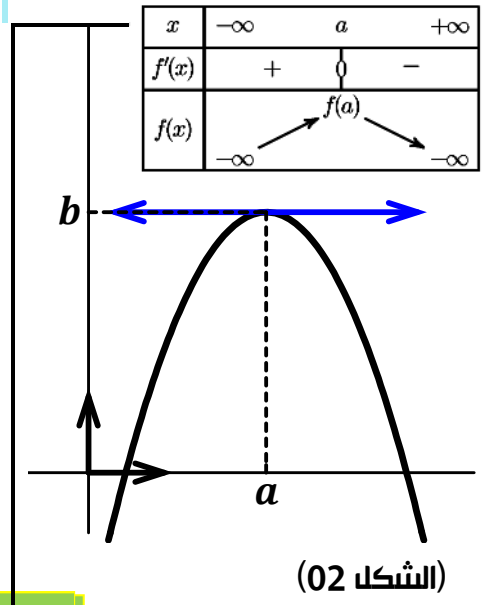
**المناقشة أفقية** مُوازية لمحور الفواصل.

## 11 إضافات:

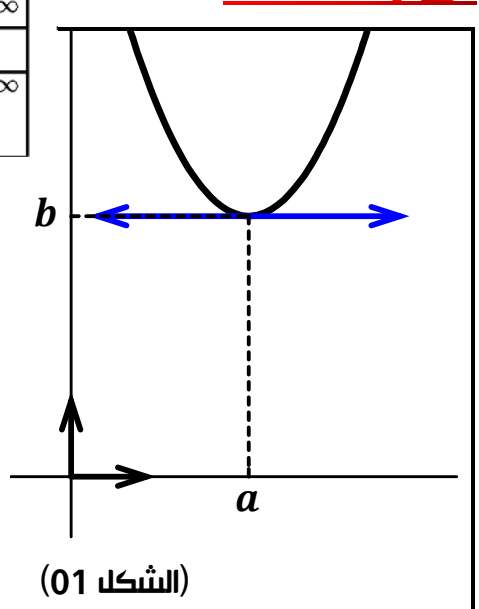
| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(a)$ | ↘ | $-\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(a)$ | ↗ | $+\infty$ |

$$\begin{cases} f(a)=b \\ f'(a)=0 \end{cases}$$



(الشكل 02)



(الشكل 01)



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

## 12 الكلفة:

- دّالة **الكلفة الهامشية** $C_m$ **حيث،** $\boxed{C_m(x) = f(x)}$، **نعوض** $x$ **بـ** $q$ حيث **كمية الإنتاج.**
- دّالة **الكلفة الإجمالية** $C_T$ **حيث،** $\boxed{C'_T(x) = C_m(x)}$، **أي:** دّالة **الكلفة الإجمالية** $C_T$ **هي** دّالة **أصلية** لـدّالة **الكلفة الهامشية** $C_m$.
- دّالة **الكلفة المتوسطة** $C_M$.



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213



# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

## التمارين// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

### التمرين 01: (08 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لتكن $f$ دّالة عددية قابلة للإشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها. لها جدول التغيرات التالي:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

تُكتب عبارة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ حيث $a$، $b$، $c$ أعداد حقيقية.

1) احسب $f'(x)$.

2) اعتمادا على جدول تغيرات الدالة $f$:

أ- عيّن الأعداد الحقيقية $a$، $b$، $c$.

ب- عيّن $\lim\limits_{x \to 1^{>}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to 1^{<}} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانياً.

جـ- قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة $f$ معللا إجابتك.

3) نأخذ فيما يلي: $c = \frac{1}{4}$؛ $b = 1$؛ $a = 1$ وليكن $(C)$ المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس.

أ) بيّن أنّه عندما يؤول $x$ إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ فإنّ المنحنى $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته: $y = x + 1$.

ب) ادرس وضعية المنحنى $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

جـ) اثبت أن النقطة $\omega(1; 2)$ مركز تناظر للمنحنى $(C)$.

د) عيّن نقط تقاطع المنحنى $(C)$ مع حامل محور الفواصل.

4) $\lambda$ عدد حقيقي، عيّن بيانياً، حسب قيم $\lambda$ عدد حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$.

### التمرين 02: (05 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الدّالة كثير الحدود $P$ معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + \frac{1}{2}$.

1. شكّل جدول تغيرات الدّالة $P$ على $\mathbb{R}$.

2. بيّن أنّ المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$.

3. استنتج إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$.

4. الدّالة العددية $G$ معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $G(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x$.

عيّن اتجاه تغيّر الدالة $G$ على $\mathbb{R}$ (لا يُطلب حساب $G(\alpha)$).



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

## التمرين 03: (03 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$f$ دّالة معرّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$، $(C_f)$ تمثيلها البياني وجدول تغيراتها مُعطى كما يلي:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | ↗ $+\infty$ | $+\infty$ | ↘ | 2 |

أجب بـــ: **خطأ** أو **صحيح** على كل سؤال مما يلي مع **تبرير الإجابة.**

1. المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب للمنحنى $(C_f)$.
2. المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.
3. مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>0$ هي $S=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.
4. في المجال $]-\infty;-1[$ يكون: "$f(x)>f(-2)$ عندما يكون $x<-2$".
5. النقطة $A(-3;1)$ تنتمي إلى المنحنى $(C_f)$.
6. الدّالة $f$ زوجية.

## التمرين 04: (09 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الدّالة العددية $f$ معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

يُرمز $(C_f)$ إلى المنحنى المُمثل للدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

$I$. 1) عيّن الأعداد الحقيقية $a$، $b$، $c$ بحيث يكون من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

2) احسب نهايات الدّالة $f$ عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

3) بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مُوازيا لمحور التراتيب يُطلب تعيين معادلة له.

4) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

5) ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

$II$. 1) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإنّ: $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ وَ $f'$ هي الدّالة المشتقة للدّالة $f$

2) عيّن اتجاه تغيّر الدّالة $f$ على مجالي مجموعة تعريفها وشكّل جدول تغيّراتها.

3) اكتب معادلة للمماس $(D)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$III$. 1) بيّن أنّ النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.

2) ارسم كلا من: $(\Delta)$، $(D)$ و$(C_f)$.

3) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ حتى يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلاّن مختلفان.

4) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e^2-1$.



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

## التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$f$ الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$

وَ $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ فإنّ: $f(x)=x-5+\frac{a}{x^2}$، حيث $a$ عدد حقيقي يُطلب تعيينه.

2)أُحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3)أ-بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ فإنّ: $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$، استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$.

ب-شكّل جدول تغيرات الدّالة $f$.

4)أثبت أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل، يُطلب تعيين معادلتيهما.

5)أوجد معادلة لـ$(\Delta)$ مماس $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

6)أُرسم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$.

7)أ-عيّن الدّالة الأصلية $F$ للدّالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تُحقق: $F(2)=-10$.

ب-أُحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=1$ وَ $x=2$.

## التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

نعتبر الدّالة العددية $f$ المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$

$(C)$ المنحنى البياني الممثل للدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الوحدة $1\ cm$ على محور الفواصل و $4\ cm$ على محور التراتيب.

1)بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}$.

2)احسب نهاية الدّالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$، واستنتج أنّ $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له.

3)ادرس وضعية $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=1$.

4)احسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدّالة $f$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

5)بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f(-x)=2-f(x)$. واستنتج أنّ $(C)$ يقبل مركز تناظر يُطلب تعيينه.

6)ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C)$.

7)أ. احسب التكامل: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$.

ب. احسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى $(C)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

## التمرين 07: (05 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$f$ هي الدّالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+100+\frac{57600}{x+1}$.

1)أُحسب نهايتي $f$ عند $-1$ بقيم أكبر وعند $+\infty$.

2)أ-بيّن أنّه من أجل كل من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$.

ب-استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.



www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

جـ-جِد الدالة الأصلية $H$ للدّالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x = 0$.

3)تُنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و200 آلة على الأكثر.

تُنَمْذَجُ الكلفة الهامشية $C_m$ لإنتاج $x$ آلة إضافية للشركة على المجال $[5;200]$ بالدالة $f$ أي أنّ: من أجل كل $x$ من المجال $[5;200]$، $C_m(x) = f(x)$.

أ-ما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن؟

ب-نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج $x$ آلة. ونُذكّر أنّ $C'(x) = C_m(x)$.

جِد الكلفة الإجمالية $C(x)$، علما أنّ الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000DA، ثم استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.

## التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) 2) **متتاليات عددية**.

3)منحنى الدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x) = (x^2-1)^3$، يقبل مماساً في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ معادلته:

أ) $y = \sqrt{2}x + 1$، ب) $y = 6\sqrt{2}x - 11$، جـ) $y = 6\sqrt{2}x + 1$.

4) 5) 6) **إحتمالات**.

## التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$I$)نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - x^2 - 1$.

1)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3)بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1,46 < \alpha < 1,48$.

4)استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$.

$II$)مؤسسة صناعية تنتج يوميا كميّة $q$ (مُقدرة بالطّن) من منتوج بكلفة متوسطة $C_M$ (مُقدرة بملايين الدّنانير) معرّفة على $[0;10]$ بـ: $C_M(q) = \frac{1}{2}q^2 - q + 1 - \frac{1}{2}\ln(q^2+1)$.

1)بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي $q$ من $[0;10]$، $C'_M(q) = \frac{g(q)}{q^2+1}$.

2)عيّن اتجاه تغيّر الكلفة المتوسطة $C_M$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ $\alpha \simeq 1,47$)

3)عيّن الكميّة التي تُنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة ثمّ حدّد هذه الكلفة المتوسطة.

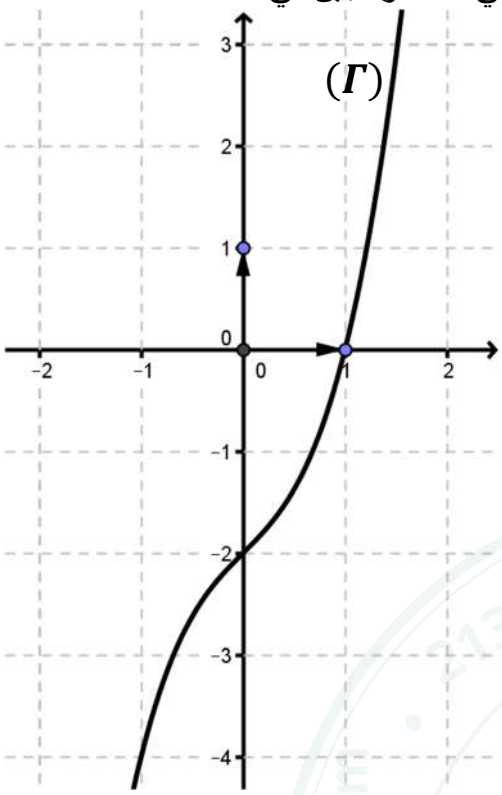
4)ما هي الكلفة الإجمالية $C$ لإنتاج 2 طن يوميا؟



www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

## التمرين 10: (07 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$g$ الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 + x - 2$ و $(\Gamma)$ تمثيلها البياني كما هو مُبيّن في الشكل.




**I) بقراءة بيانية** عيّن $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

**II)** $f$ الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ: $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1)أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2)بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $x$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

-استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3)أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

4)بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-1,4; -1,3[$.

5)ارسم $(\Delta)$ ثمّ المنحنى $(C_f)$.

6)أحسب $A$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$، $x = 1$ وَ $x = 3$.



www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

## الحلول// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

## حل التمرين 01: (08 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

**تذكير:** $\boxed{\left(\frac{c}{u}\right)'=\frac{-cu'}{u^2}}$ أو $\boxed{\left(\frac{c}{u}\right)'=\frac{0\times u-u'\times c}{u^2}=\frac{-cu'}{u^2}}$، حيث $c$ عدد حقيقي.

**لدينا:** $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$.

**1)حساب $f'(x)$ :**

$f$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty;1[$ وَ$]1;+\infty[$، ولدينا: $\boxed{f'(x)=a-\frac{c}{(x-1)^2}}$.

**2)بالاعتماد على جدول تغيرات الدالة $f$ :**

**أ-تعيين الأعداد الحقيقية $a$، $b$، $c$:**

لدينا: $\begin{cases}f'\left(\frac{1}{2}\right)=0\\ f'\left(\frac{3}{2}\right)=0\\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1\\ f\left(\frac{3}{2}\right)=3\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}a-\frac{c}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=0\\ a-\frac{c}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=0\\ \frac{1}{2}a+b+\frac{c}{\frac{1}{2}-1}=1\\ \frac{3}{2}a+b+\frac{c}{\frac{3}{2}-1}=3\end{cases}$ وعليه: $\begin{cases}a-4c=0 & \dots(1)\\ \frac{1}{2}a+b-2c=1 & \dots(2)\\ \frac{3}{2}a+b+2c=3 & \dots(3)\end{cases}$،

من (1) نجد $a=4c$ وبالتعويض في (2) يكون $2c+b-2c=1$ أي: $\boxed{b=1}$،

وبالتعويض في (3) نجد $6c+1+2c=3$ أي: $\boxed{c=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}}$، وبالتالي: $\boxed{a=4c=4\left(\frac{1}{4}\right)=1}$.

**إذن** $\boxed{f(x)=x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}}$ وَ$\boxed{f'(x)=1-\frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}}$.

**ب-تعيين $\lim\limits_{x\to 1^>} f(x)$ وَ$\lim\limits_{x\to 1^<} f(x)$ :** $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^<} f(x)=-\infty}$ وَ$\boxed{\lim\limits_{x\to 1^>} f(x)=+\infty}$.

**تفسير النتيجة بيانياً:**

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=1}$ **(المُوازي لمحور التراتيب)** مُقارب للمنحنى المُمثل للدّالة $f$.

**جـ-المقارنة بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و$\frac{3}{4}$ بالدّالة $f$ مع التعليل:**

لدينا: $f\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)$ لأنّ: $\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$ و**$f$ متناقصة تماما** على المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

**(3** $c=\frac{1}{4}$؛ $b=1$؛ $a=1$ **لدينا:** $f(x)=x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}$ وَ$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}$،

$(C)$ المنحنى البياني المُمثل لتغيرات الدّالة $f$ في **معلم متعامد ومتجانس**.



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

**أ) تبيان أنّه عندما يؤول $x$ إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ فإنّ المنحنى $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته، $y = x + 1$ :**

**ط01:** لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right] = 0$

وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right] = 0$

إذن: المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x + 1$ **مقارب مائل** لـ$(C)$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

**ط02:** بمأنّ: $\begin{cases} f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{4}}{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}}{x-1} = 0 \end{cases}$، فإنّ: المستقيم $(\Delta): y = x + 1$ **مُقارب مائل** لـ$(C)$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

**ب) دراسة وضعية المنحنى $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$: (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ )**

لدينا: $f(x) - y = \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$ ومنه: إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$ من إشارة المقام $(x - 1)$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-1$ | - | ‖ | + |
| $f(x)-y$ | - | ‖ | + |
| الوضعية | $(C)$ يقع **تحت** $(\Delta)$ | ‖ | $(C)$ يقع **فوق** $(\Delta)$ |

**جـ) اثبات أن النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى $(C)$:**

نُثبت أنّ $f(2(1)-x)+f(x) = 2(2)$ أي: $\boxed{f(2-x)+f(x) = 4}$

لدينا: $f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$

ومنه: $f(2-x) = (2-x) + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{(2-x)-1} = -x + 3 + \frac{\frac{1}{4}}{-x+1} = -x + 3 - \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$

وعليه: $f(2-x) - f(x) = \left[-x + 3 - \frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right] - \left[x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right] = 4$

إذن: $\omega(1;2)$ مركز تناظر لـ$(C)$.

**د) تعيين نقط تقاطع المنحنى $(C)$ مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة: $f(x) = 0$ )**

لدينا: $f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{4(x-1)} = \frac{(x+1)[4(x-1)]+1}{4(x-1)} = \frac{4x^2-3}{4(x-1)}$

$f(x) = 0$ معناه: $\frac{4x^2-3}{4(x-1)} = 0$

ومنه: $4x^2 - 3 = 0$ و $4(x-1) \neq 0$

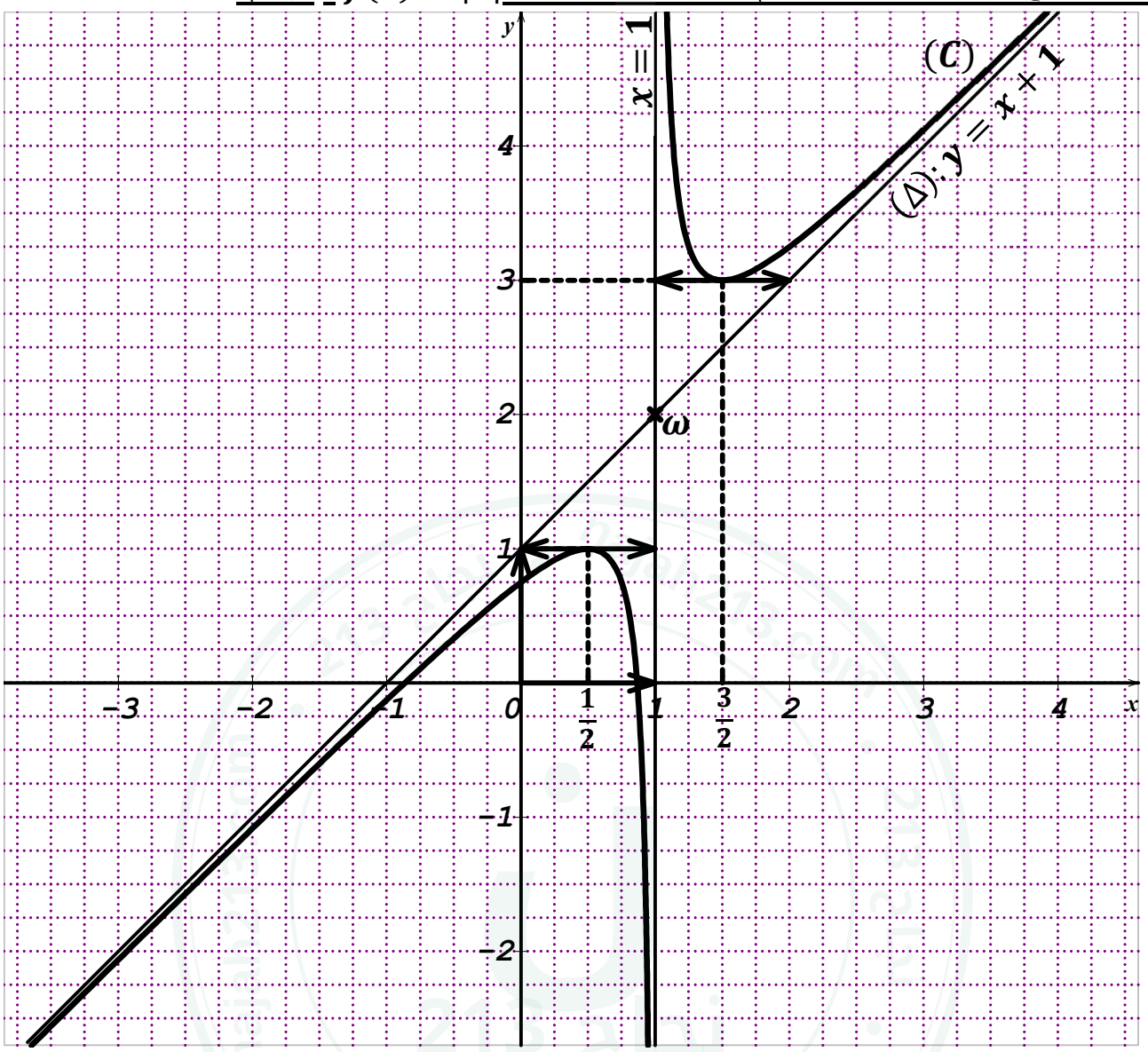
أي: $x^2 = \frac{3}{4}$ و $x \neq 1$

وعليه: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ و $x \neq 1$؛ إذن: $\boxed{(C) \cap (xx') = \left\{A\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};0\right); B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)\right\}}$.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com · نجاح 213

**4) $\lambda$ عدد حقيقي، تعيين بيانياً، حسب قيم $\lambda$ عدد حلول المعادلة $|\lambda| = f(x)$ : الرسم:**




**من البيان نجد:**

| إذا كـــــــان | فإنّ المعـــــادلة $f(x) = \|\lambda\|$ |
|---|---|
| $\lambda \in ]-\infty;3[ \cup ]3;+\infty[$ | لها حلان |
| $\lambda = 3$ أو $\lambda = -3$ | لها حل مضاعف |
| $\lambda \in ]-3;-1[ \cup ]1;3[$ | ليس لها حلول |
| $\lambda = 1$ أو $\lambda = -1$ | لها حل مضاعف |
| $\lambda \in ]-1;1[$ | لها حلان |

المناقشة أفقية
عدد حقيقي $= f(x)$

**إضافات: توضيح فقط**

حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$ **بيانيا** هي **فواصل** نقط **تقاطع** المنحنى $(C)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y = |\lambda|$.

(المستقيم ذو المعادلة $y = |\lambda|$ **ينطبق على حامل محور الفواصل أو يقع فوقه** و**يُوازيه** لأنّ $|\lambda| \geq 0$)

**الحالة الأولى:** $|\lambda| > 3$ (التقاطع نقطتين)، $\lambda > 3$ أو $\lambda < -3$ أي: $\boxed{\lambda \in ]-\infty;3[ \cup ]3;+\infty[}$.

**الحالة الثانية:** $|\lambda| = 3$ (التقاطع نقطة)، $\boxed{\lambda = 3}$ أو $\boxed{\lambda = -3}$.

**الحالة الثالثة:** $1 < |\lambda| < 3$ (لا يوجد تقاطع)، $1 < \lambda < 3$ **أو** $-3 < \lambda < -1$ أي: $\boxed{\lambda \in ]-3;-1[ \cup ]1;3[}$

**الحالة الرابعة:** $|\lambda| = 1$ (التقاطع نقطة)، $\boxed{\lambda = 1}$ أو $\boxed{\lambda = -1}$.

**الحالة الخامسة:** $0 \leq |\lambda| < 1$ (التقاطع نقطتين)، $-1 < \lambda < 1$ أي: $\boxed{\lambda \in ]-1;1[}$.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

## حل التمرين 02: (05 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $P$ دّالة كثير حدود معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $P(x)=x^3-4x^2+4x+\frac{1}{2}$.

**1.تشكّيل جدول تغيّرات الدّالة $P$ على $\mathbb{R}$:**

**أ) النهايات:** $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty}$؛ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty}$.

**ب) المشتقة (حساب $P'(x)$):** $P$ دّالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا $\boxed{P'(x)=3x^2-8x+4}$.

**ج) إشارة المشتقة (إشارة $P'(x)$):**

نضع: $P'(x)=0$ نجد: $3x^2-8x+4=0$، مميزها: $\Delta=(-8)^2-4(3)(4)=64-48=16>0$

لها حلين متمايزين هما: $\boxed{x_1=\frac{8-4}{6}=\frac{2}{3}}$ و $\boxed{x_2=\frac{8+4}{6}=2}$.

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-1}{2}$ | $\alpha$ | $0$ | $\frac{2}{3}$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | | $+$ | | | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $P(x)$ | $-\infty$ | ↗ | | | $\frac{91}{54}$ | ↘ | $\frac{1}{2}$ | ↗ $+\infty$ |

**2.تبيان أنّ المعادلة $P(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$:**

الدّالة $P$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$

(لأنّها من جدول التغيرات متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$)

ولدينا: $\begin{cases}P\left(-\frac{1}{2}\right)=-2,62\\P(0)=\frac{1}{2}\end{cases}$ أي: $P\left(-\frac{1}{2}\right)\times P(0)<0$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $P(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

**3.استنتاج إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$: من جدول التغيرات نجد:**

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**4.لدينا:** $G$ دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $G(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2+\frac{1}{2}x$.

**تعيين اتجاه تغيّر الدالة $G$ على $\mathbb{R}$:**

**ب) المشتقة (حساب $G'(x)$):**

$G$ دّالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $\boxed{G'(x)=x^3-4x^2+4x+\frac{1}{2}=P(x)}$.

لـ$G'(x)$ و$P(x)$ **نفس** الإشارة

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $G'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

إذن: الدّالة $G$ **متناقصة تماما** على المجال $]-\infty;\alpha]$ **ومتزايدة تماما** على المجال $[\alpha;+\infty[$.



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

## حل التمرين 03: (03 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الإجابة بـــ: **خطأ** أو **صحيح** مع **تبرير الإجابة:**

1. المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=2}$ مقارب للمنحنى $(C_f)$، ـــــــــــ **(صحيح)**

**لأنّ:** $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2}$ وَ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2}$.

2. المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا، ـــــــــــ **(خطأ)**

**لأنّ:** $(C_f)$ **لا يقطع حامل محور الفواصل**

(**توضيح** $(C_f)$ يقع فوق المقارب الأفقي الذي معادلته $\boxed{y=2}$ أي $f(x)>2$).

3. مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>0$ هي $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$، $S=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ـــــــــــ **(صحيح)**

**لأنّ:** من أجل كل $x$ من $D_f$، فإنّ $f(x)>2$.

4. في المجال $]-\infty;-1[$ يكون: "$f(x)>f(-2)$ عندما يكون $x<-2$"، ـــــــــــ **(صحيح)**

**لأنّ:** بمأنّ $f$ **متزايدة تماما** على المجال $]-\infty;-1[$، فإنّه "لمـا $x<-2$ يكون $f(x)<f(-2)$".

5. النقطة $A(-3;\boxed{1})$ تنتمي إلى المنحنى $(C_f)$، ـــــــــــ **(خطأ)**

**لأنّ:** من أجل كل $x$ من $D_f$، فإنّ $f(x)>2$.

6. الدّالة $f$ زوجية، ـــــــــــ **(خطأ)**

**لأنّ:** $D_f$ غير متناظرة بالنسبة إلى الصفر ($1\in D_f$ و $-1\notin D_f$).

## حل التمرين 04: (09 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ، وَ $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

$(C_f)$ المنحنى المُمثل للدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

**I.1) تعيين الأعداد الحقيقية $a$، $b$، $c$ بحيث يكون، $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ :**

- **ط01:** لدينا: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)}{x+1}+\frac{c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$

ولدينا من جهة أخرى: $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=0\\b+c=3\end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=4\end{cases}$ إذن: $\boxed{f(x)=x-1+\frac{4}{x+1}}$.

- **ط02:** $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}=\frac{x^2-1+4}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{4}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\frac{4}{x+1}=x-1+\frac{4}{x+1}$.

**2)حساب نهايات الدّالة $f$ عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

ولدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=+\infty\end{cases}$، لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1}(x^2+3)=4\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}(x+1)=0^-\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}(x+1)=0^+\end{cases}$.



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

**3)تبيان أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مُوازيا لمحور التراتيب يُطلب تعيين معادلة له:**

بمأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = -\infty$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = +\infty$

فـإنّ: المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ (المُوازي لمحور التراتيب) مقارب للمنحنى $(C_f)$.

**4)تبيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x\to -\infty}\left[x - 1 + \frac{4}{x+1} - (x-1)\right] = \lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{4}{x+1}\right] = 0$

وَ $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{4}{x+1}\right] = 0$

إذن: المستقيم $(\Delta): y = x - 1$ مستقيم مقارب **مائل** للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

**5)دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$: (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ )**

لدينا: $f(x) - y = \frac{4}{x+1}$ ومنه إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة المقام $(x + 1)$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x+1$ | - | ‖ | + |
| $f(x)-y$ | - | ‖ | + |
| **الوضع النسبي** | $(C_f)$ يقع **تحت** $(\Delta)$ | ‖ | $(C_f)$ يقع **فوق** $(\Delta)$ |

**II.1) تبيان أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R} - \{-1\}$ فإنّ، $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ :**

$f$ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; -1[$ وَ $]-1; +\infty[$، ولدينا: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

ومنه: $f'(x) = 1 - \frac{4(1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-2^2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1-2)(x+1+2)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

**2)تعيين اتجاه تغيّر الدّالة $f$ على مجالي مجموعة تعريفها وتشكّيل جدول تغيّراتها:**

لدينا: $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $((x-1)(x+3))$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | - | ‖ - | 0 | + |
| $x+3$ | - | 0 | + ‖ | + | |
| $f'(x)$ | + | 0 | - ‖ | 0 | + |

إذن: $f$ **متناقصة تماماً** على كل من المجالين $]-\infty; -3]$ و$[-1; 1]$

وَ**متزايدة تماماً** على كل من المجالين $[-3; -1[$ و$[1; +\infty[$؛ **ويكون جدول تغيراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - ‖ | 0 | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $-6$ | ‖ $+\infty$ ↘ | $2$ | ↗ $+\infty$ |

حيث: $f(1) = 2$ وَ$f(-3) = -6$.

**3)كتابة معادلة للمماس $(D)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0:**

معادلة المماس $(D)$ من الشكل: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ولدينا: $\begin{cases} f'(0) = \frac{((0)-1)((0)+3)}{((0)+1)^2} = -3 \\ f(0) = \frac{(0)^2+3}{(0)+1} = 3 \end{cases}$، إذن: $\boxed{(D): y = -3x + 3}$.

**III.1) تبيان أنّ النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$:**

**نُبين أنّ $f(2(-1)-x)+f(x)=2(-2)$ أي: نُبين أنّ $\boxed{f(-2-x)+f(x)=-4}$**

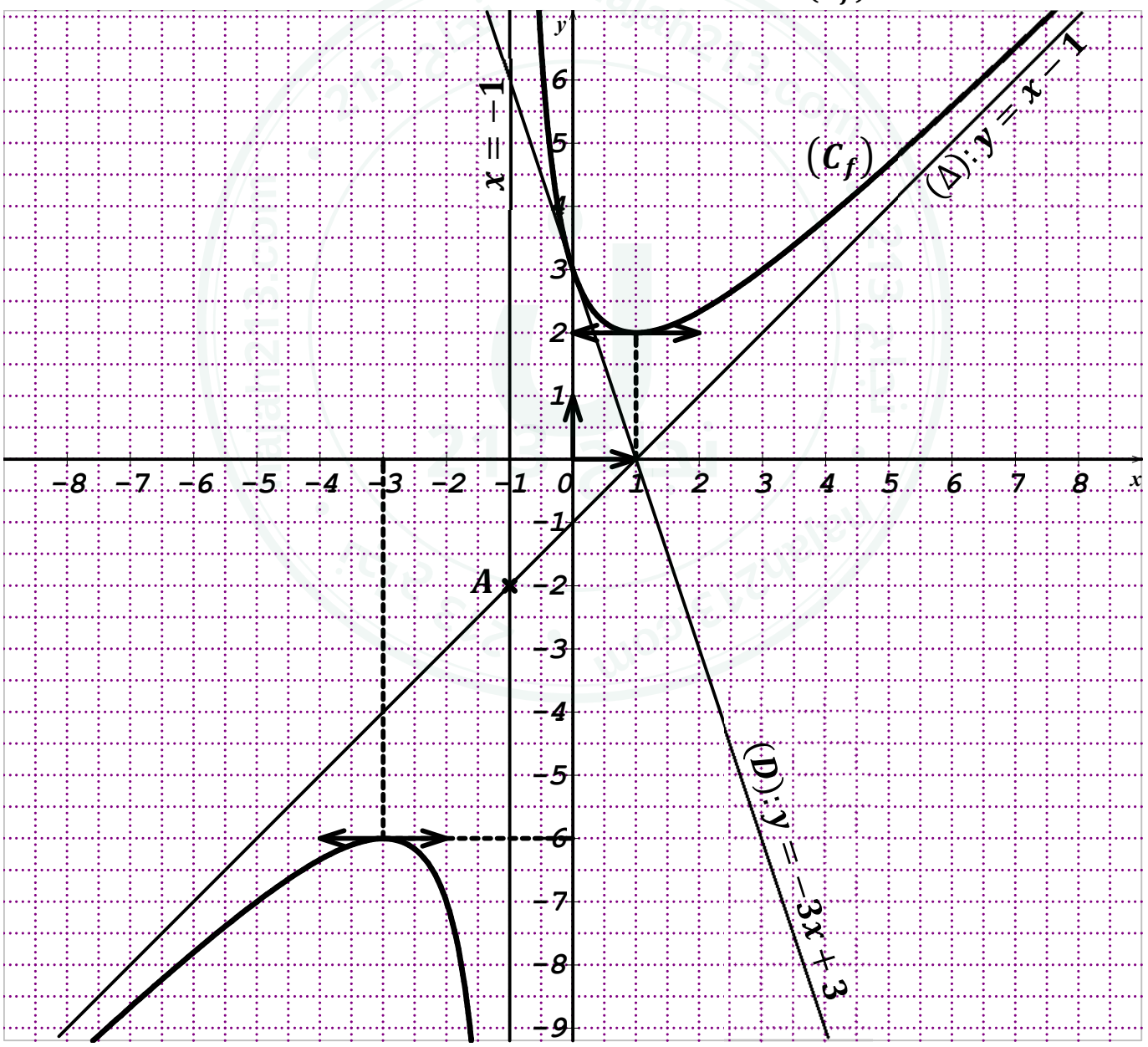
لدينا: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

ومنه: $f(-2-x) = (-2-x) - 1 + \frac{4}{(-2-x)+1} = -x - 3 + \frac{4}{-x-1} = -x - 3 - \frac{4}{x+1}$

وعليه: $f(-2-x) + f(x) = -x - 3 - \frac{4}{x+1} + x - 1 + \frac{4}{x+1} = -4$

إذن: النقطة $A(-1;-2)$ هي **مركز تناظر** للمنحنى $(C_f)$.

**2)رسم كلا من $(\Delta)$، $(D)$ و$(C_f)$:**




**3)تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ حتى يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلاّن مختلفان:**

يكون للمعادلة $f(x)=m$ **حلاّن مختلفان** إذا كـــــان: $\boxed{m \in ]-\infty;-6[ \cup ]2;+\infty[}$.

**توضيح فقط:** (المناقشة عبارة عن مناقشة أفقية)



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حلول المعادلة $f(x)=m$ بيانياً هي **فواصل نقط تقاطع** $(C_f)$ مع المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=m}$.

(استعمل مسطرة وقم بتحريكيها من الأسفل إلى الأعلى بالتوازي مع محور الفواصل عدد التقاطعات مع المنحنى هو عدد الحلول ولا تنسى في نفس الوقت قراءة $m$ على محور التراتيب)

**4)حساب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e^2-1$:**

بمأنّ $(C_f)$ يقع **فوق** $(\Delta)$ على المجال $[1;e^2-1]$

**فإنّ:** $S=\int_1^{e^2-1}[f(x)-y]\,dx=\int_1^{e^2-1}\left(\frac{4}{x+1}\right)dx=[4\ln|x+1|]_1^{e^2-1}=[4\ln(x+1)]_1^{e^2-1}$

ومنه: $S=4\left[\ln\left((e^2-1)+1\right)-\ln\left((1)+1\right)\right]=4[\ln(e^2)-\ln(2)]=4[2-\ln(2)]$

إذن: $\boxed{S=(8-4\ln(2))u.a}$.

## حل التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ و $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$

$(C_f)$ التمثيل البياني لـ $f$ في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

**1)تبيان أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ فإنّ، $f(x)=x-5+\frac{a}{x^2}$ :**

- **ط01:** لدينا: $f(x)=x-5+\frac{a}{x^2}=\frac{(x-5)x^2+a}{x^2}=\frac{x^3-5x^2+a}{x^2}$،

ولدينا من جهة أخرى: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$ بالمطابقة نجد: $\boxed{a=4}$ إذن: $\boxed{f(x)=x-5+\frac{4}{x^2}}$.

- **ط02:** $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}=\frac{x^2(x-5)}{x^2}+\frac{4}{x^2}=x-5+\frac{4}{x^2}$.

**2)حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ وَ $\lim_{x\to0}f(x)$:**

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ وَ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

وبمأنّ $\begin{cases}\lim_{x\to0}(x^3-5x^2+4)=4\\ \lim_{x\to0}x^2=0^+\end{cases}$، فإنّ: $\lim_{x\to0}f(x)=+\infty$.

**3)أ-تبيان أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ فإنّ، $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$ :**

- **ط01:** باستعمال العبارة: $f(x)=x-5+\frac{4}{x^2}$

$f$ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=1-\frac{4(2x)}{(x^2)^2}=1-\frac{8x}{x^4}=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$$

ولدينا من جهة أخرى: $\frac{x^3-8}{x^3}=\frac{x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8}{x^3}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$

إذن: $\boxed{f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}}$.

- **ط02:** باستعمال العبارة: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$

$f$ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$، ولدينا:



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$f'(x)=\frac{(3x^2-10x)\times x^2-(2x)(x^3-5x^2+4)}{[x^2]^2}=\frac{3x^4-10x^3-2x^4+10x^3-8x}{x^4}=\frac{x^4-8x}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}$$

ولدينا من جهة أخرى: $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}=\frac{x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$

إذن: $\boxed{f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}}$.

**استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ :**

**إشارة $f'(x)$ :** يُمكن كتابتها على الشكل $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}=\frac{x-2}{x}\times\frac{x^2+2x+4}{x^2}$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $x$، $x^2+2x+4>0$ (لأنّ مميزه **سالب تماما** $\Delta=-12<0$)

إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $\frac{x-2}{x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | - | | - | | 0 | + | |
| $x$ | - | | ‖ | + | | + | |
| $f'(x)$ | + | | ‖ | - | 0 | + | |

إذن: $f$ **متزايدة تماماً** على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و$]0;2]$، **وَمتناقصة تماماً** على المجال $[2;0[$.

**ب-تشكيل جدول تغيرات الدّالة $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | | ‖ | $+\infty$ ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

حيث: $f(2)=-2$.

**4)اثبات أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل، يُطلب تعيين معادلتيهما:**

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty}$؛ إذن: **محور التراتيب** مقارب لـ$(C_f)$.

ولدينا: $\begin{cases} f(x)=x-5+\frac{4}{x^2} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0 \end{cases}$؛ إذن: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=x-5}$ مقارب مائل لـ$(C_f)$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

**5)ايجاد معادلة لـ$(\Delta)$ مماس $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1:**

معادلة $(\Delta)$ من الشكل: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

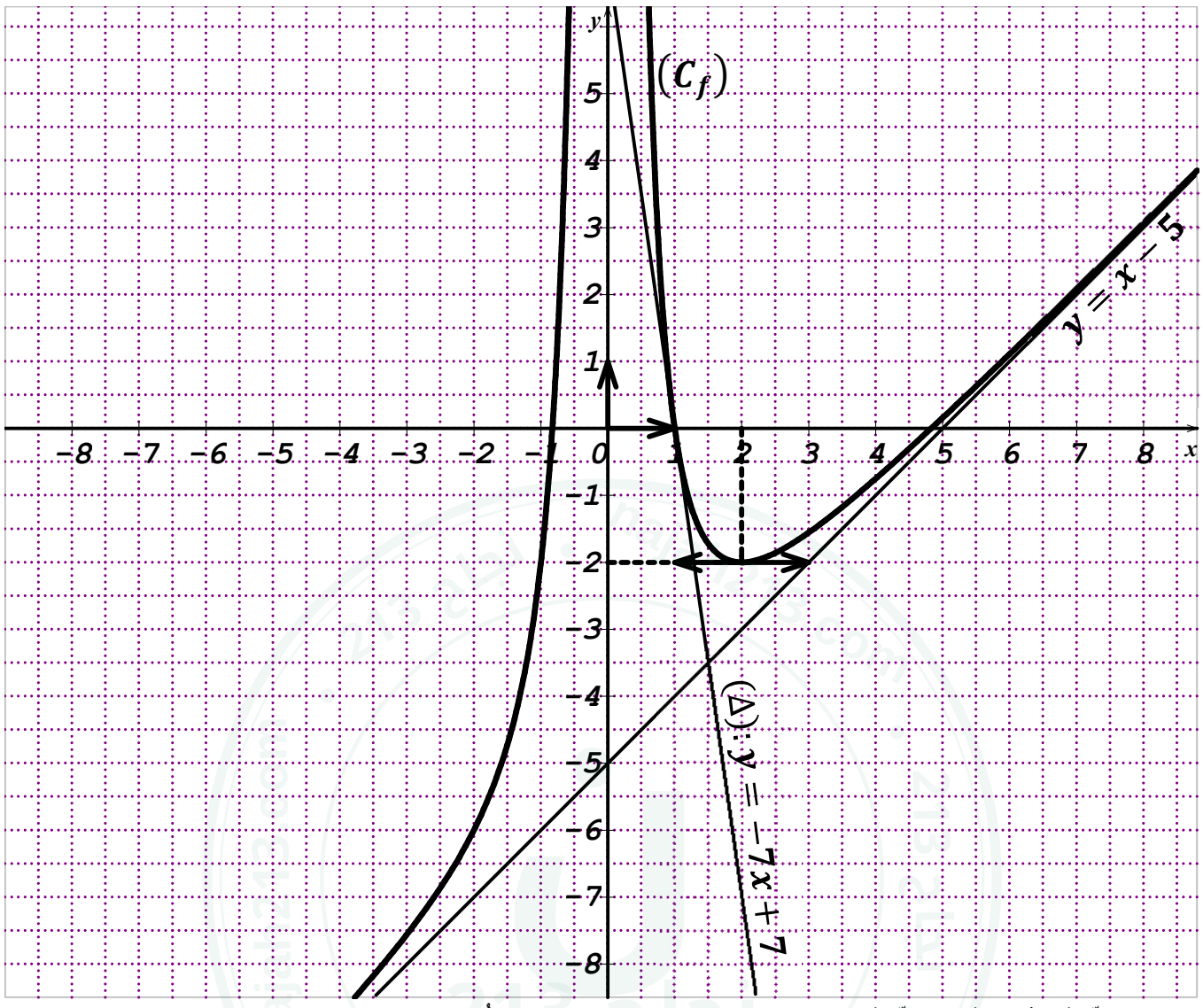
ولدينا: $\begin{cases} f'(1)=\frac{(1)^3-8}{(1)^3}=\frac{1-8}{1}=-7 \\ f(x)=(1)-5+\frac{4}{(1)^2}=-4+4=0 \end{cases}$ بالتعويض نجد: $y=-7(x-1)+0$

إذن: $\boxed{(\Delta): y=-7x+7}$.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com · نجاح 213

**6)رسم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$:**




**7)أ-تعيين الدّالة الأصلية $F$ للدّالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تُحقق، $F(2) = -10$:**

- لدينا: $f(x) = x - 5 + \frac{4}{x^2} = x - 5 + 4 \times \frac{1}{x^2}$، ومنه: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{4}{x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$
- ولدينا: $F(2) = -10$ معناه: $\frac{1}{2}(2)^2 - 5(2) - \frac{4}{(2)} + c = -10$

أي: $2 - 10 - 2 + c = -10$

وبالتالي: $c = 0$ إذن: $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{4}{x}}$.

**ب-حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x = 1$ و$x = 2$:**

بمأنّ $(C_f)$ يقع **تحت** محور الفواصل على المجال $[1;2]$، فـإنّ:

$$S = \int_1^2 -f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx = [F(x)]_2^1 = F(1) - F(2) = -\frac{17}{2} - (-10) = -\frac{17}{2} + 10$$

إذن: $\boxed{S = \frac{3}{2}u.a}$.

## حل التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1}$ وَ $D_f = ]-\infty;+\infty[$.



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$(C)$ المنحنى البياني الممثل للدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد** $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

**الوحدة $1\ cm$ على محور الفواصل و$4\ cm$ على محور التراتيب.**

**1)تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا، $f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}$ :**

لدينا: $1-\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x}{x^2+1}=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=f(x)$، إذن: $\boxed{f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}}$.

**2)حساب نهاية الدّالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$، واستنتاج أنّ $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$، نستنتج أنّ

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=1}$ (**المُوازي لمحور الفواصل**) مقارب لـ$(C)$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

**3)دراسة وضعية $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=1$ : (ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$)**

لدينا: $f(x)-y=1-\frac{x}{x^2+1}-1=\frac{-x}{x^2+1}$

إذن: إشارة الفرق $f(x)-y$ من إشارة البسط $(-x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)-1$ | | + | 0 | - | |
| الوضع النسبي | $(C)$ يقع فوق $(\Delta)$ | | $(C)$ يقطع $(\Delta)$ | | $(C)$ يقع تحت $(\Delta)$ |

**4)حساب $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدّالة $f$ ثم تشكّيل جدول تغيراتها:**

$f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+1)-(2x)(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-x^2-1-2x^3+2x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(x^2-1)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

إذن: $f$ **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ وَ $[1;+\infty[$، **وَمتناقصة تماما** على المجال $[-1;1]$؛

**ويكون جدول تغيراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $\frac{3}{2}$ | ↘ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $1$ |

**5)تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f(-x)=2-f(x)$ :**

لدينا: $f(-x)=1-\frac{(-x)}{(-x)^2+1}=1+\frac{x}{x^2+1}=2-1+\frac{x}{x^2+1}=2-\left(1-\frac{x}{x^2+1}\right)=2-f(x)$

إذن: $\boxed{f(-x)=2-f(x)}$.

**استنتاج أنّ $(C)$ يقبل مركز تناظر يُطلب تعيينه:**

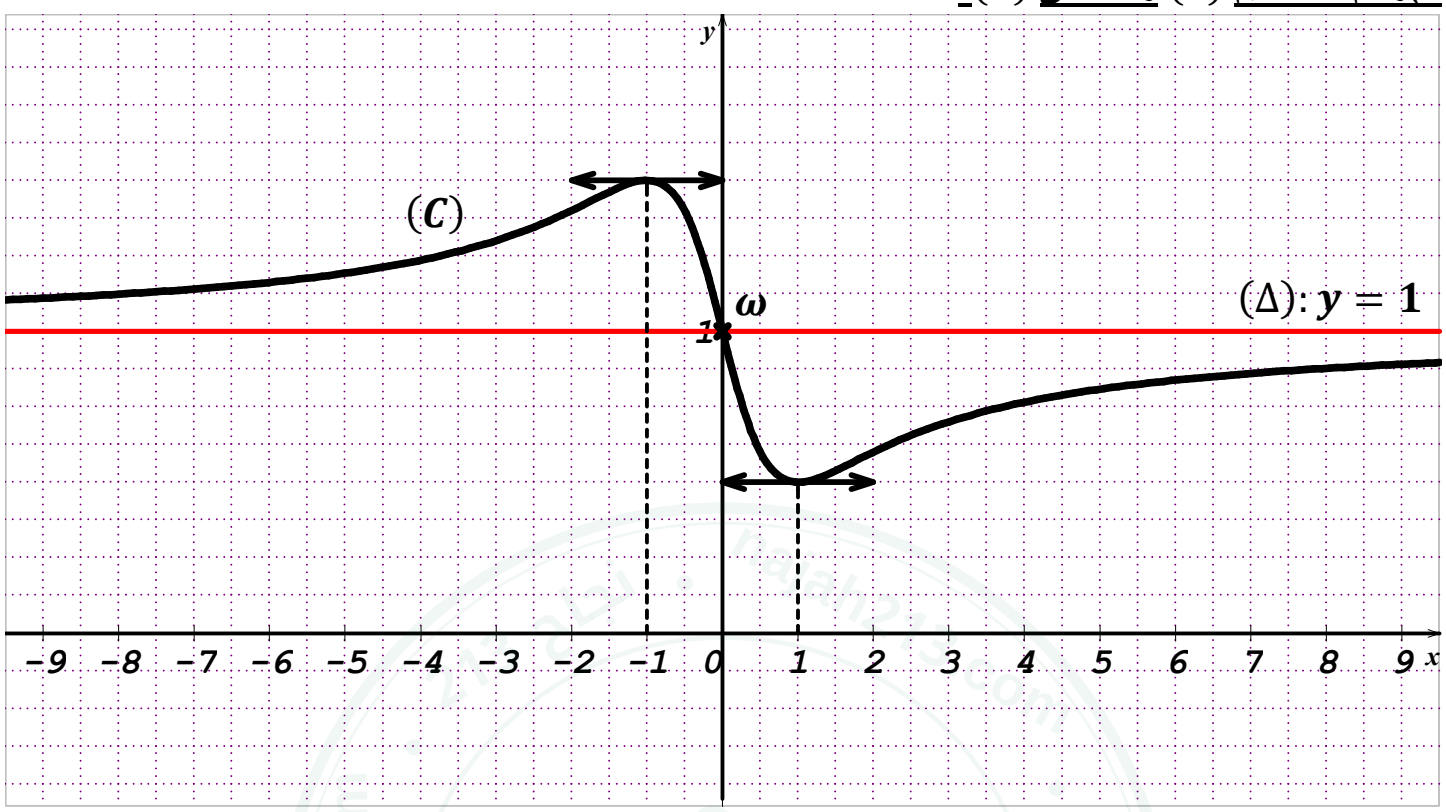
لدينا: $f(-x)=2-f(x)$ يعني: $f(-x)+f(x)=2$، من الشكل: $f(2(0)-x)+f(x)=2(1)$؛



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com · نجاح 213

إذن النقطة $\omega(0;1)$ هي **مركز تناظر** لـ$(C)$.

**6)رسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C)$:**




**7)أ. حساب التكامل، $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$:**

لدينا: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}[ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{ln2}{2}$

**ب. حساب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى $(C)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما $x=0$ و$x=1$:**

لدينا: $A = 4cm^2 \times \int_0^1 f(x)dx = 4cm^2 \times \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$

ومنه: $A = 4cm^2 \times \left(\int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx\right) = 4cm^2 \times \left([x]_0^1 - \frac{\ln 2}{2}\right)$

وعليه: $A = 4cm^2 \times \left(1 - \frac{\ln 2}{2}\right) = (4 - 2\ln 2)cm^2$.

## حل التمرين 07: (05 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$ وَ $D_f = ]-1;+\infty[$.

**1)حساب نهايتي $f$ عند $-1$ بقيم أكبر وعند $+\infty$:**

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} \left(\frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}\right) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} (x+1) = 0^+$.

وَ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{57600}{x+1} = 0$.

**2)أ-تبيان أنّه من أجل كل من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$:**

$f$ قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = x^2 - \frac{57600}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 - 57600}{(x+1)^2} = \frac{(x(x+1))^2 - 57600}{(x+1)^2} = \frac{(x^2+x)^2 - (240)^2}{(x+1)^2}$$



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

وبالتالي: $\boxed{f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}}$.

**ب-استنتاج اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:**

لدينا: $x^2 + x + 240 > 0$ (لأنّ مميزه **سالب تماما** $\Delta = (1)^2 - 4(1)(240) = -959 < 0$)

وبالتالي: إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2 + x - 240)$

نضع: $x^2 + x - 240 = 0$ $(*)$

**نحل المعادلة** $(*)$**: نحسب المميز $\Delta$:** $\Delta = (1)^2 - 4(1)(-240) = 1 + 960 = 961 > 0$

ومنه: $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{961}}{2(1)} = \frac{-1+31}{2} = \frac{30}{2} = 15 \in ]-1;+\infty[$

**و** $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{961}}{2(1)} = \frac{-1-31}{2} = \frac{-32}{2} = -16 \notin ]-1;+\infty[$

| $x$ | $-1$ | | $15$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-240$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

إذن: $f$ **متناقصة تماما** على المجال $[-1;15]$، و**متزايدة تماما** على المجال $[15;+\infty[$.

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-1$ | | $15$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $4825$ | ↗ | $+\infty$ |

**جـ-ايجاد الدالة الأصلية $H$ للدّالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x = 0$:**

مجموعة الدّوال الأصلية للدّالة $h$ على المجال $]-1;+\infty[$ هي الدّوال: $H(x) = \ln(x+1) + c$، حيث $c$ ثابت حقيقي، ونعلم أنّ $H(0) = 0$ ومنه: $c = 0$ إذن: $\boxed{H(x) = \ln(x+1)}$.

**3)** تُنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و200 آلة على الأكثر.

تُنَمْذَجُ الكلفة الهامشية $C_m$ لإنتاج $x$ آلة إضافية للشركة على المجال $[5;200]$ بالدّالة $f$ أي أنّ: من أجل كل $x$ من المجال $[5;200]$، $C_m(x) = f(x)$.

**أ-ايجاد عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن:**

لدينا: $C_m(x) = f(x)$

من جدول تغيّرات الدّالة $f$، **4825** هي **قيمة حدية صغرى** لـ$f$ على المجال $[5;200]$، من أجل $x = 15$.

إذن: عدد الآلات التي يجب أن تُنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يُمكن هو ***15***.

ب-نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج $x$ آلة. ونُذكّر أنّ $C'(x) = C_m(x)$.

**ايجاد الكلفة الإجمالية $C(x)$، علما أنّ الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000DA:**

- لدينا: $C'(x) = C_m(x) = f(x)$ أي: $C$ هي **الدّالة الأصلية** للدّالة $f$ حيث $C(5) = 4 \times 10^4$
- ولدينا: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$

يكون: $C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600\ln(x+1) + c$ (حيث $c \in \mathbb{R}$)

من جهة أخرى: $C(5) = 4 \times 10^4$ نجد: $\frac{1}{12}5^4 + 100(5) + 57600\ln(5+1) + c = 4 \times 10^4$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ومنه: $c = -\frac{6625}{12} - 57600\ln 6 + 4 \times 10^4$

وبالتالي: $\boxed{c = \frac{473375}{12} - 57600\ln 6}$

بالتعويض نجد: $C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600\ln(x+1) + \frac{473375}{12} - 57600\ln 6$

إذن: $\boxed{C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600\ln\left(\frac{x+1}{6}\right) + \frac{473375}{12}}$.

**استنتاج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى:**

لدينا: $C(15) = \frac{1}{12}(15)^4 + 100(15) + 57600\ln\left(\frac{15+1}{6}\right) + \frac{473375}{12} = 101662,43DA$.

## حل التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

**اختيار الاقتراح الصحيح الوحيد، مع التبرير:**

1) 2) **متتاليات عددية.**

3)منحنى الدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2-1)^3$، يقبل مماساً في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ معادلته من الشكل: $y = f'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) + f(\sqrt{2})$،

ولدينا: $\begin{cases} f(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}^2-1\right)^3 = 1 \\ f'(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}\left(\sqrt{2}^2-1\right)^2 = 6\sqrt{2} \end{cases}$ لأنّ: $\begin{cases} f(x) = (x^2-1)^3 \\ f'(x) = 3\times 2x(x^2-1)^2 = 6x(x^2-1)^2 \end{cases}$

بالتعويض نجد: $y = 6\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) + 1 = 6\sqrt{2}x - 11$،

إذن: الاقتراح الصحيح هو **ب)** $y = 6\sqrt{2}x - 11$.

4) 5) 6) **إحتمالات.**

## حل التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 02// الشعبة: تسيير وإ.

***I)*** لدينا: $g(x) = x^3 - x^2 - 1$ وَ $D_g = ]-\infty;+\infty[$.

**1)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$.

**2)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$ ثمّ تشكّل جدول تغيراتها:**

$g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $g'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

إذن: $g$ **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;0]$ وَ $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$، و**متناقصة تماما** على المجال $\left[0;\frac{2}{3}\right]$؛

**ويكون جدول تغيراتها كالتالي:**



www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $\frac{-31}{27}$ | ↗ $+\infty$ |

**3)تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1,46<\alpha<1,48$:**

لدينا: $g$ **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $]1,46;1,48[$ (لأنها **متزايدة تماما** على $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$)

ولدينا: $\begin{cases}g(1,46)=-0,02\\g(1,48)=+0,05\end{cases}$ أي: $g(1,46)\times g(1,48)<0$.

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1,46<\alpha<1,48$،

أي: $\boxed{g(\alpha)=0}$.

**4)استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$:**

من السؤال 3) نُلخص إشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$ في الجدول التالي:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

***II)***مؤسسة صناعية تنتج يوميا كميّة $q$ (مُقدرة بالطّن) من منتوج بكلفة متوسطة $C_M$ (مُقدرة بملايين الدّنانير) معرّفة على $[0;10]$ بـ: $C_M(q)=\frac{1}{2}q^2-q+1-\frac{1}{2}\ln(q^2+1)$.

**1)تبيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي $q$ من $[0;10]$، $C'_M(q)=\frac{g(q)}{q^2+1}$:**

لدينا: $C_M(q)=\frac{1}{2}q^2-q+1-\frac{1}{2}\ln(q^2+1)$

ومنه: $C_M'(q)=q-1-\frac{1}{2}\left(\frac{2q}{q^2+1}\right)=q-1-\frac{q}{q^2+1}=\frac{(q-1)(q^2+1)-q}{q^2+1}=\frac{q^3-q^2-1}{q^2+1}=\frac{g(q)}{q^2+1}$.

**2)تعيين اتجاه تغيّر الكلفة المتوسطة $C_M$ ثمّ تشكيل جدول تغيراتها: (بأخذ $\alpha\simeq 1,47$)**

لدينا: $C_M'(q)=\frac{g(q)}{q^2+1}$ ومنه: إشارة $C_M'(q)$ من إشارة $g(q)$ على المجال $[0;10]$ (لأنّ $q^2+1>0$)

| $q$ | $1$ | | $\alpha$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_M'(q)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

إذن: $C_M$ **متناقصة تماما** على المجال $[1;\alpha]$، وَ**متزايدة تماما** على المجال $[\alpha;10]$.

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

| $q$ | $1$ | | $\alpha$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_M'(q)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $C_M(q)$ | $0,15$ | ↘ | $0,04$ | ↗ | $38,69$ |

3)تعيين الكميّة التي تُنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة ثمّ تحديد هذه الكلفة المتوسطة:

الكمية التي تُنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة هي $\boxed{q=\alpha\simeq 1,47t}$، وَ$\boxed{C_M(\alpha)\simeq 0,04}$، أي: $40000D$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

**4)ايجاد الكلفة الإجمالية $C$ لإنتاج 2 طن يوميا: (أي:$C(2)$)**

لدينا: $C(2) = 2C_M(2) = 2\left(\frac{1}{2}(2)^2 - 2 + 1 - \frac{1}{2}\ln(2^2+1)\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\ln(5)\right)$

إذن: $\boxed{C(2) \simeq 0{,}39}$ أي: $390000D$.

## حل التمرين 10: (07 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

**I)** لدينا : $g(x) = x^3 + x - 2$ وَ $D_g = \mathbb{R}$.

**بقراءة بيانية تعيين $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:**

**من البيان،** لدينا: $g(1) = 0$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | - | 0 | + |

**II)** لدينا : $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2}$ وَ $D_g = ]-\infty;0[ \cup ]0;+\infty[$،

و $(C_f)$ التمثيل البياني لـ$f$ في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1)أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:**

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty}$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

وَ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty}$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

**ب) حساب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ وتفسّير النتيجة بيانيا:**

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{-(x-1)}{x^2} = +\infty}$ لأنّ $\lim\limits_{x\to0}(-(x-1)) = 1$، $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0^+$ وَ $\lim\limits_{x\to0} x = 0$.

**تفسّيرها البياني: محور التراتيب مقارب لـ$(C_f)$.**

**2)تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $x$، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ :**

$f$ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{1(x^2) - 2x(x-1)}{(x^2)^2} = 1 - \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = 1 - \frac{-x+2}{x^3} = \frac{x^3+x-2}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

**-استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ تشكّيل جدول تغيّراتها:**

إشارة $f'(x)$ نُلخصها في الجدول التالي:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | - | ‖ | + | |
| $g(x)$ | - | ‖ | - 0 | + |
| $f'(x)$ | + | ‖ | - 0 | + |

إذن:

**متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;0]$ وَ $[1;+\infty[$، **وَ متناقصة تماما** على المجال $[0;1]$؛

**ويكون جدول تغيراتها كالتالي:**



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ $0$ $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ $+\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ $01$ ↗ | $+\infty$ |

**3)أ) تبيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\frac{x-1}{x^2}-x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x} = 0$

وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x-1}{x^2}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x} = 0$

إذن: المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $\boxed{y=x}$ **مقارب مائل** للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

**ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$:**

**ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.**

لدينا: $f(x)-y = \frac{-x+1}{x^2}$، ومنه: إشارة الفرق من إشارة البسط $(-x+1)$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-x+1$ | $+$ | ‖ | $+$ $0$ | $-$ |
| $f(x)-x$ | $+$ | ‖ | $+$ $0$ | $-$ |
| **الوضع النسبي** | $(C)$ يقع فوق $(\Delta)$ | ‖ | $(C)$ يقع فوق $(\Delta)$ $(C)$ **يقطع** $(\Delta)$ | $(C)$ يقع تحت $(\Delta)$ |

**4)تبيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-1,3;-1,4[$:**

لدينا: $f$ **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $]-1,4;-1,3[$ (لأنها **متزايدة تماما** على $]-\infty;0[$)

ولدينا: $\begin{cases} f(-1,4) \simeq -0,18 \\ f(-1,3) \simeq +0,06 \end{cases}$ أي: $f(-1,4)\times f(-1,3) < 0$.

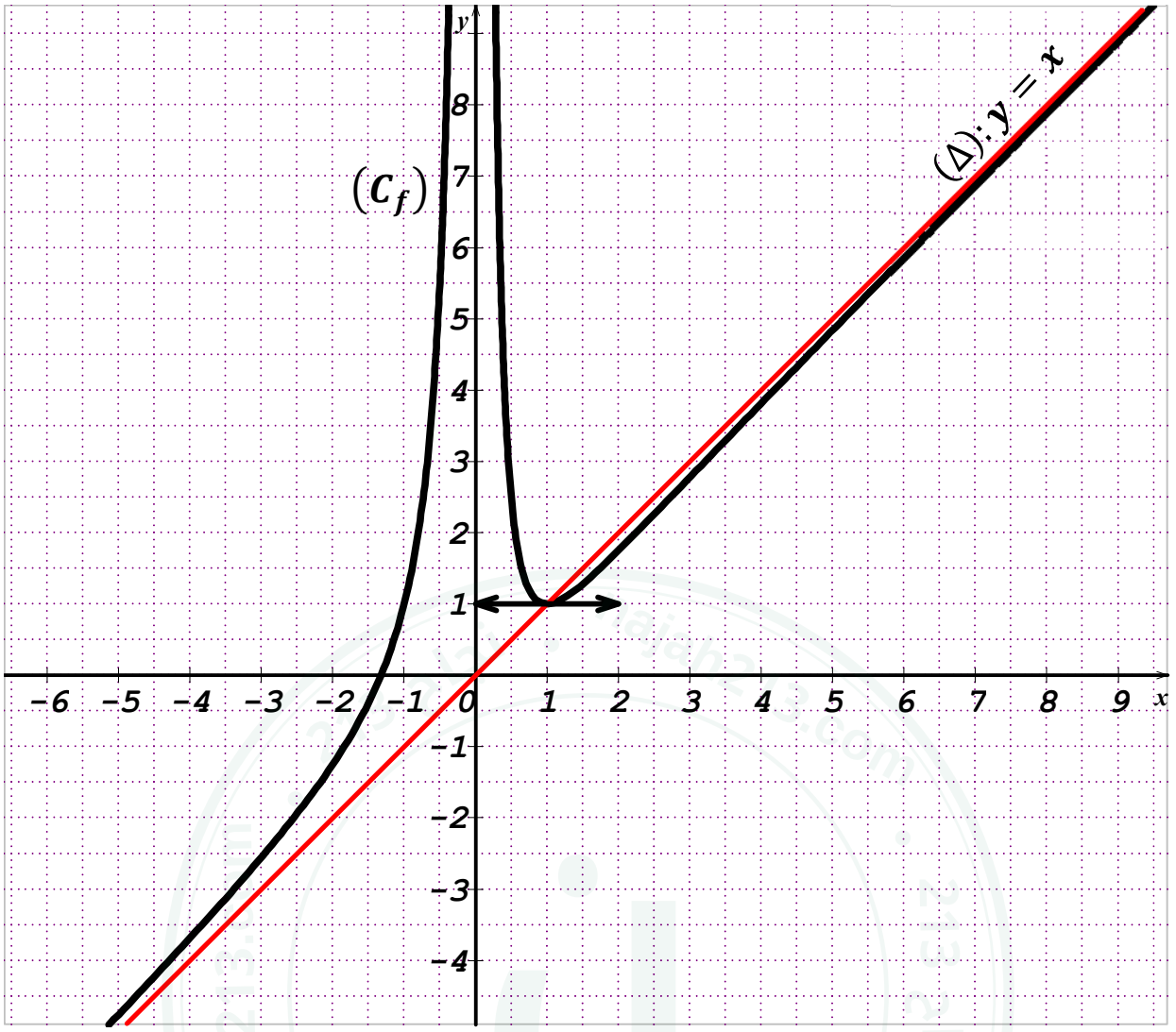
إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-1,4;-1,3[$،

أي: $\boxed{f(\alpha)=0}$.

**5)رسم $(\Delta)$ ثمّ المنحنى $(C_f)$:**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com




**6)حساب $A$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها، $y = x$، $x = 1$ وَ $x = 3$:**

$$\int_1^3 [x - f(x)]dx = \left[\frac{1}{x} + \ln x\right]_1^3 = \left(\ln 3 - \frac{2}{3}\right) u.a$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com