2BO2C0

المجاميع و الجداءات

في المتتاليات العددية

للسنة 3 ثانوي

الشعب :

- ✓ رياضي.
- ✓ تقني رياضي.
- ✓ علوم تجريبية.

أفكار المجاميع و الجداءات الواردة في البكالوريات من :2008الى2019

من إعداد الأستاذ: لعور عبد الكريم

جوان 2020

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com • نجاح 213 • najah213.com • نجاح 213 • najah213.com • نجاح 213 •

najah213.com · نجاح 213

مكتسبات لابد منها:

أ- مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_p.

نعتبر المجموع S_n بحيث : $S_n = u_p + u_{p+1} + \ldots\ldots\ldots + u_n$

$$S_n = \frac{n-p+1}{2}\left(u_p + u_n\right)$$

مجموع متتالية حسابية هو: (عدد الحدود ÷ 2) × (الحد الأول + الحد الأخير).

عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

***مجموع متتالية حسابية شهيرة أساسها r =1 :**

$$1+2+3+\ldots\ldots\ldots+n = \frac{n+1}{2}(n) = \frac{n}{2}(n+1)$$

ب- مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_p.

نعتبر المجموع S_n بحيث : $S_n = v_p + v_{p+1} + \ldots\ldots\ldots + v_n$

$$S_n = v_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$$ مع : $q \neq 1$

ج- نتائج مهمة:

نتيجة 01:

نعتبر $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول v_p مع $q>0$ و $v_p>0$

فان: (v_n^{α}) مع $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ متتالية هندسية أساسها q^{α} و حدها الأول v_p^{α} مع $p \in \mathbb{N}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

البرهان : نضع: $X_n = v_n^\alpha$ تكون (X_n) هندسية إذا كان: $X_{n+1} = \lambda X_n$

حيث: λ هو أساس المتتالية (X_n)

لدينا: $X_{n+1} = v_{n+1}^\alpha$ وبما أن (v_n) هندسية معناه : $v_{n+1} = q.v_n$

فان : $X_{n+1} = (q.v_n)^\alpha$ تكافئ : $X_{n+1} = q^\alpha.v_n^\alpha$ مع : $X_n = v_n^\alpha$

تكافئ : $X_{n+1} = q^\alpha.X_n$ ومنه: (v_n^α) متتالية هندسية أساسها q^α

دراسة مثال :

لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$.

$$S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n = 1\left(\frac{1-2^{n-0+1}}{1-2}\right)$$

$$S_2 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n^2 = (1)^2\left(\frac{1-(2^2)^{n-0+1}}{1-(2)^2}\right)$$

$$S_3 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{v_n} = \left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

الحل النموذجي لـ S_2: لدينا : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه: $v_n = v_0.q^n$

طبيعة المتتالية: (v_n^2) لدينا : $v_n^2 = (v_0.q^n)^2$ تكافئ: $v_n^2 = v_0^2.(q^{2n})$ تكافئ: $v_n^2 = v_0^2.(q^2)^n$

ومنه : (v_n^2) متتالية هندسية أساسها $q^2 = 2^2$ وحدها الأول $v_0^2 = 1^2$

$$S_2 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n^2 = (1)^2\left(\frac{1-(2^2)^{n-0+1}}{1-(2)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1-(4)^{n-0+1}}{1-4}\right) = \left(\frac{1-(4)^{n+1}}{-3}\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{1-4^{n+1}}{3}\right)$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

أمثلة إضافية للفهم الجيد:

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$

$$S_4 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sqrt{v_n} = \sqrt{v_0}\left(\frac{1-\left(\sqrt{q}\right)^{n-0+1}}{1-\sqrt{q}}\right)$$

$$S_5 = \frac{1}{v_0^2} + \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{v_n^2} = \left(\frac{1}{v_0^2}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{q^2}\right)^{n-0+1}}{1-\left(\frac{1}{q^2}\right)}\right)$$

$$S_6 = \sqrt[3]{v_0} + \sqrt[3]{v_1} + \sqrt[3]{v_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sqrt[3]{v_n} = \sqrt[3]{v_0}\left(\frac{1-\left(\sqrt[3]{q}\right)^{n-0+1}}{1-\sqrt[3]{q}}\right)$$

الحل النموذجي لـ S_5:

لدينا : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه: $v_n = v_0.q^n$

طبيعة المتتالية: لدينا : $\left(\frac{1}{v_n^2}\right)$ تكافئ: $\frac{1}{v_n^2} = \frac{1}{v_0^2}\left(\frac{1}{q^2}\right)^n$ تكافئ: $\frac{1}{v_n^2} = \frac{1}{v_0^2.q^{2n}}$ تكافئ: $\frac{1}{v_n^2} = \frac{1}{\left(v_0.q^n\right)^2}$

ومنه : $\left(\frac{1}{v_n^2}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q^2} = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $\frac{1}{v_0^2} = 1$

$$S_5 = \frac{1}{v_0^2} + \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{v_n^2} = \left(\frac{1}{v_0^2}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{q^2}\right)^{n-0+1}}{1-\left(\frac{1}{q^2}\right)}\right)$$

$$= 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{(2)^2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{(2)^2}\right)}\right) = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}\right) = \left(\frac{1-\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4}}\right)$$

$$S_5 = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ملاحظة: بنفس الطريقة نجيب على باقي المجاميع .

نتيجة 02:

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين هندسيتين أساسهما q_1 و q_2 على الترتيب وحدهما الأول v_p و w_p مع:

$(w_n \neq 0)$ و $q_1 \neq q_2$ فإن: $\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{q_1}{q_2}$ ، $q_2 \neq 0$ وحدها الأول $\frac{v_p}{w_p}$ ، $p \in \mathbb{N}$

البرهان: نضع: $T_n = \frac{v_n}{w_n}$ تكون (T_n) هندسية إذا كان: $T_{n+1} = \beta . T_n$

حيث: β هو أساس المتتالية (T_n)

لدينا: $T_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{w_{n+1}}$ وبما أن (v_n) و (w_n) هندسيتين معناه : $v_{n+1} = q_1 . v_n$ و $w_{n+1} = q_2 . w_n$

فان : $T_{n+1} = \frac{q_1 . v_n}{q_2 . w_n}$ تكافئ : $T_{n+1} = \frac{q_1}{q_2}\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$ مع : $T_n = \frac{v_n}{w_n}$

تكافئ : $T_{n+1} = \left(\frac{q_1}{q_2}\right).T_n$ ومنه: $\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{q_1}{q_2}$

ملاحظة مهمة جدا: إذا كان $q_1 = q_2$ تصبح (T_n) متتالية ثابتة لأن: $T_{n+1} = T_n$

مجموع متتالية ثابتة هو: (الحد الأول) × (عدد الحدود).

دراسة مثال: لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$.

$$S = 1 + \frac{v_1}{4} + \frac{v_2}{16} + \frac{v_3}{64} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{v_n}{4^n}$$

الحل النموذجي لـ S : لدينا : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه: $v_n = v_0 . q^n$

و : 4^n متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول هو: $4^0 = 1$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

طبيعة المتتالية: $\left(\frac{v_n}{4^n}\right)$ لدينا : $\frac{v_n}{4^n}=\frac{v_0.q^n}{1.4^n}$ تكافئ: $\frac{v_n}{4^n}=\frac{v_0}{1}\left(\frac{q^n}{4^n}\right)$ تكافئ: $\frac{v_n}{4^n}=\frac{v_0}{1}\left(\frac{q}{4}\right)^n$

ومنه : $\left(\frac{v_n}{4^n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{q}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{v_0}{1}=\frac{1}{1}=1$

$$S = 1 + \frac{v_1}{4} + \frac{v_2}{16} + \frac{v_3}{64} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{v_n}{4^n}$$

$$S = 1\left(\frac{1-\left(\frac{2}{4}\right)^{n-0+1}}{1-\left(\frac{2}{4}\right)}\right) = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right) = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

تكافئ : $S=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\left(2-\frac{2}{2^n.2}\right)=\left(2-\frac{1}{2^n}\right)$

نتيجة 03:

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين هندسيتين أساسهما q_1 و q_2 على الترتيب وحدهما الأول v_p و w_p مع $p\in\mathbb{N}$

فإن: $q_1\times q_2\neq 1$ $(v_n\times w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q_1\times q_2$ و حدها الأول $v_p\times w_p$ مع $p\in\mathbb{N}$

البرهان : نضع: $Y_n=v_n.w_n$ تكون (Y_n) هندسية إذا كان: $Y_{n+1}=\gamma.Y_n$

حيث: γ هو أساس المتتالية (Y_n)

لدينا: $Y_{n+1}=v_{n+1}.w_{n+1}$ وبما أن (v_n) و (w_n) هندسيتين معناه : $v_{n+1}=q_1.v_n$ و $w_{n+1}=q_2.w_n$

فان : $Y_{n+1}=(q_1.v_n)(q_2.w_n)$ تكافئ : $Y_{n+1}=(q_1.q_2)(v_n.w_n)$ مع : $Y_n=v_n.w_n$

تكافئ : $Y_{n+1}=(q_1.q_2).Y_n$ ومنه: $(v_n.w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q_1.q_2$

ملاحظة مهمة جدا: إذا كان $q_1.q_2=1$ تصبح (Y_n) متتالية ثابتة لأن: $Y_{n+1}=Y_n$

مجموع متتالية ثابتة هو: (الحد الأول) × (عدد الحدود).

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

دراسة مثال : لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$.

$$S' = v_0 + 4v_1 + 16v_2 + \ldots\ldots\ldots + 4^n v_n$$

الحل النموذجي لـ S' : لدينا : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه: $v_n = v_0.q^n$

و : 4^n متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول هو: $4^0 = 1$

طبيعة المتتالية: $(4^n v_n)$ لدينا : $4^n v_n = (1.4^n)(v_0.q^n)$ تكافئ: $4^n v_n = (1.v_0)(4^n.q^n)$

تكافئ: $4^n v_n = (1.v_0)(4.q)^n$

ومنه : $(4^n v_n)$ متتالية هندسية أساسها $4.q = 4(2) = 8$ وحدها الأول $1.v_0 = 1(1) = 1$

$$S' = v_0 + 4v_1 + 16v_2 + \ldots\ldots\ldots + 4^n v_n$$

$$S' = 1\left(\frac{1-(8)^{n-0+1}}{1-8}\right)$$

$$S' = \left(\frac{1-8^{n+1}}{-7}\right)$$ تكافئ :

دراسة مثال حول المتتالية الثابتة :

لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$.

$$\Im = v_0 + \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n}v_n$$

الحل النموذجي لـ $\Im$: لدينا : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه: $v_n = v_0.q^n$

و : $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول هو: $\frac{1}{2^0} = 1$

طبيعة المتتالية: $\left(\frac{1}{2^n}v_n\right)$ لدينا : $\frac{1}{2^n}v_n = \left(\frac{1}{2^n}\right)(v_0.q^n)$ تكافئ: $\frac{1}{2^n}v_n = \left(\frac{1}{2^n}\right).v_0(2)^n$

تكافئ: $\frac{1}{2^n}v_n = v_0\left(\frac{2^n}{2^n}\right) = v_0$ ومنه : $\left(\frac{1}{2^n}v_n\right)$ **متتالية ثابتة.**

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

$$\Im = v_0 + \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n}v_n$$

$$\Im = v_0\left(n - 0 + 1\right) = 1\left(n + 1\right)$$

تكافئ : $\Im = n + 1$

الانتقال من متتالية حسابية إلى متتالية هندسية:

$\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r و حدها الأول u_p.

فان: $\left(e^{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = e^r$ وحدها الأول e^{u_p} مع $p \in \mathbb{N}$

البرهان :

نضع: $X_n = e^{u_n}$ معناه: $X_{n+1} = e^{u_{n+1}}$

وبما أن: $\left(u_n\right)$ حسابية فان : $u_{n+1} = u_n + r$

أي : $X_{n+1} = e^{u_n + r}$ تكافئ : $X_{n+1} = e^r.e^{u_n}$ تكافئ : $X_{n+1} = e^r.X_n$

ومنه: $\left(e^{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = e^r$ وحدها الأول e^{u_p}

دراسة مثال : لتكن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها 3 وحدها الأول $u_0 = 2$.

$$\Gamma = e^2 + e^5 + \ldots\ldots + e^{u_n}$$

الحل النموذجي لـ Γ : لدينا : $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية معناه: $u_n = u_0 + nr$

طبيعة المتتالية: $\left(e^{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ لدينا : $e^{u_n} = e^{u_0 + nr}$ تكافئ: $e^{u_n} = e^{u_0}.e^{nr}$ تكافئ: $e^{u_n} = e^{u_0}.\left(e^r\right)^n$

ومنه : $\left(e^{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = e^r$ وحدها الأول e^2

$$\Gamma = e^2 + e^5 + \ldots\ldots + e^{u_n}$$

$$\Gamma = e^2\left(\frac{1 - \left(e^3\right)^{n+1}}{1 - e^3}\right)$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com • نجاح 213

الانتقال من متتالية هندسية إلى متتالية حسابية:

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية موجبة تماما أساسها q و حدها الأول v_p.

فان: $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r=\ln(q)$ وحدها الأول $\ln(v_p)$ مع $p\in\mathbb{N}$

البرهان:

نضع: $T_n=\ln(v_n)$ معناه: $T_{n+1}=\ln(v_{n+1})$

وبما أن: (v_n) هندسية فان : $v_{n+1}=q.v_n$

أي : $T_{n+1}=\ln(q.v_n)$ باستعمال خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري نجد : $T_{n+1}=\ln(q)+\ln(v_n)$

تكافئ : $T_{n+1}=\ln(q)+T_n$

ومنه: $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r=\ln(q)$ وحدها الأول $\ln(v_p)$

دراسة مثال: لتكن $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول $t_0=2$

$$\Sigma=\ln(2)+.....+\ln(t_n)$$

الحل النموذجي لـ Σ: لدينا : $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه: $t_n=t_0.q^n=2.3^n$

طبيعة المتتالية: $(\ln(t_n))$ لدينا : $\ln(t_n)=\ln(t_0.q^n)$ تكافئ: $\ln(t_n)=\ln(t_0)+\ln(q^n)$

تكافئ: $\ln(t_n)=\ln(t_0)+n\ln(q)$

ومنه : $(\ln(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r=\ln(q)=\ln(3)$ وحدها الأول $\ln(2)$

$$\Sigma=\ln(2)+.....+\ln(t_n)$$

$$\Sigma=\frac{n-0+1}{2}\left[\ln(2)+\ln(t_n)\right]=\frac{n+1}{2}\left[\ln(2.t_n)\right]$$

(خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري)

$$=\frac{n+1}{2}\left[\ln(2.2.3^n)\right]=\frac{n+1}{2}\left[\ln(4.3^n)\right]=\left[\ln(4.3^n)\right]^{\frac{n+1}{2}}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ملاحظة مهمة: $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية موجبة تماما أساسها q و حدها الأول v_p.

علما أن: $\log(v_n)$ هي الدالة اللوغاريتم العشري: $\log(v_n)=\dfrac{\ln(v_n)}{\ln(10)}$

$$\Theta = \log(v_0)+\log(v_1).....+\log(v_n)$$

$$\Theta = \frac{\ln(v_0)}{\ln(10)}+\frac{\ln(v_1)}{\ln(10)}+.....+\frac{\ln(v_n)}{\ln(10)}$$

حساب المجموع:

$$\Theta = \frac{1}{\ln(10)}\left[\ln(v_0)+\ln(v_1).....+\ln(v_n)\right]$$

$$\Theta = \frac{1}{\ln(10)}\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\ln(v_0)+\ln(v_n)\right)\right]$$

يمكن تعميمها على اللوغاريتم ذي الأساس a مع $a\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$ معناه: $\log_a(v_n)=\dfrac{\ln(v_n)}{\ln a}$

خارج المقرر الدراسي لمادة الرياضيات مجرد ملاحظة تستعمل في مادتي الفيزياء و الكيمياء.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مجاميع البكالوريات 2008 إلى 2019

أفكار وتقنيات الواردة في البكالوريات * كل تمرين بفكرة *

التمرين الأول:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$

بحدها الأول $u_0 = 6$ بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

كما يلي : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

معطيات التمرين : لدينا:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{16}{3}$

* حدها العام هو: $v_n = \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

* عبارة u_n بدلالة n : لدينا من المعطيات : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

تكافئ: $u_n = v_n + \frac{2}{3}$ ومنه: $u_n = \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$

* أحسب بدلالة n المجاميع الآتية :

$S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots + v_n$

$S' = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$

حل التمرين الأول:

أ- حساب S ، $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots + v_n$

(v_n) متتالية هندسية مجموعها: $S = v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right)$

تكافئ: $S = \left(\frac{16}{3}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{16}{3}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2}}\right)$

تكافئ: $S = 2\left(\frac{16}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ تكافئ: $\boxed{S = \frac{32}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}$

ب- حساب S' ، $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n$

ملاحظة مهمة: إذا كانت المتتالية (u_n) ليست حسابية ولا هندسية نستعمل العلاقة من المعطيات وكتابتها بدلالة المتتالية المعروفة وهي المتتالية الهندسية (v_n) في هذا التمرين.

لدينا من المعطيات : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ تكافئ: $u_n = v_n + \frac{2}{3}$

أحسن طريقة لحساب المجموع في هذه الحالات وهو الحساب بصورة عمودية كما هو موضح:

بجمع طرف لطرف نجد:

$$\begin{cases} u_0 = v_0 + \frac{2}{3} \\ u_1 = v_1 + \frac{2}{3} \\ u_2 = v_2 + \frac{2}{3} \\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \\ u_n = v_n + \frac{2}{3} \end{cases}$$

$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots + v_n + \frac{2}{3}(n-0+1)$

معناه:

$S' = S + \frac{2}{3}(n+1) = \frac{32}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}$

ومنه: $\boxed{S' = -\frac{32}{3.2^{n+1}} + \frac{2}{3}n + \frac{34}{3}}$

التمرين الثاني:

ليكن n عدد طبيعي:

أهم شيء في كل المجاميع:

* أحسب بدلالة n المجموع:

$S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \ldots\ldots + e^{n\ln 3}\right]$

ملاحظة مهمة: في وجود الدالتين الأسية واللوغاريتم النيبيري أول شيء، نقوم بتوظيف الخواص إن أمكن.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

حل التمرين الثاني:

باستعمال خاصية اللوغاريتم النيبيري:

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$.

نضع: $X_n=e^{n\ln 3}$ تكافئ: $X_n=e^{\ln 3^n}$ تكافئ: $X_n=3^n$

لدينا: $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+.....+e^{n\ln 3}\right]$

يكافئ: $S_n=-\frac{1}{2}\left[3^0+3^1+3^2+3^3+.....+3^n\right]$

إيجاد طبيعة المتتالية : $X_n=3^n$

لدينا: $X_{n+1}=3^{n+1}=3.3^n$ يكافئ: $X_{n+1}=3.X_n$

معناه: $X_n=3^n$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $3^0=1$

ومنه: $S_n=-\frac{1}{2}\left[3^0\left(\frac{1-3^{n-0+1}}{1-3}\right)\right]=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1-3^{n+1}}{-2}\right)\right]$

ومنه: $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\frac{13}{4}$

بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$ ،

و (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$v_n=\ln\left(u_n-3\right)$

معطيات التمرين : لدينا:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

* حدها العام هو: $v_n=\ln\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

* أحسب بدلالة n:

$P=(u_0-3)\times(u_1-3)\times(u_3-3)\times.....\times(u_n-3)$

حل التمرين الثالث:

نقوم بالبحث عن (u_n-3) انطلاقا من : $v_n=\ln\left(u_n-3\right)$

لدينا: $v_n=\ln\left(u_n-3\right)$ معناه : $e^{v_n}=u_n-3$

ومنه: $u_n-3=e^{v_n}$

بضرب طرف لطرف نجد:

$$\begin{cases} u_0-3=e^{v_0} \\ u_1-3=e^{v_1} \\ u_2-3=e^{v_2} \\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \\ u_n-3=e^{v_n} \end{cases}$$

$$P=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times.....\times e^{v_n}$$

بتوظيف خواص الدالة الآسية نجد :

$P=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times.....\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+v_2+.....+v_n}$

نضع: S هو المجموع الحدود المتتابعة للمتتالية (v_n) :

$S=v_0+v_1+v_2+.....+v_n$

تكافئ: $P=e^S$

(v_n) متتالية هندسية مجموعها: $S=v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right)$

تكافئ: $S=\ln\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\ln\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right)$

تكافئ: $S=2\ln\left(\frac{1}{4}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$

تكافئ: $P=e^{2\ln\left(\frac{1}{4}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)}$

ملاحظة مهمة: تبسيط الحساب مهم إذا كان مجموع أخر له علاقة بالمجموع المحسوب ، مأمون ذلك يكفي الوصول إلى هذه العبارة لأن الهدف هو حساب النهاية لهذا المجموع ، مهما كان التبسيط ، النهاية تبقى صحيحة لما يؤول n إلى $+\infty$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين الرابع:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

و (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

كما يلي : $v_n = \ln(u_n)$

معطيات التمرين : لدينا:

(u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$ وحدها الأول $u_0 = \sqrt{e}$

*حدها العام هو: $u_n = \sqrt{e}\left(\frac{1}{e}\right)^n$

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -1$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$

*حدها العام هو: $v_n = \frac{1}{2} - n$

* أحسب بدلالة n: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times ..... \times u_n)$

حل التمرين الرابع:

أ- حساب S_n ، $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

(u_n) متتالية هندسية مجموعها: $S_n = u_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right)$

تكافئ: $S_n = \sqrt{e}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}\right) = \sqrt{e}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{e^{n+1}}\right)}{\frac{e-1}{e}}\right)$

تكافئ: $S_n = \frac{e\sqrt{e}}{e-1}\left(1-e^{-n-1}\right)$

ب- حساب P_n ،

بتوظيف الخاصية الأساسية للدالة اللوغاريتم النيبيري نجد :

$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times ..... \times u_n)$

$= \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + ... + \ln(u_n)$

من المعطيات لدينا: $v_n = \ln(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

تكافئ: $P_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -1$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$

مجموعها هو: $P_n = \frac{n-0+1}{2}(v_0 + v_n)$

المجموع: (عدد الحدود ÷ 2) × (الحد الأول + الحد الأخير)

تكافئ: $P_n = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n\right)$ تكافئ: $P_n = \frac{n+1}{2}(1-n)$

تكافئ: $P_n = \frac{-n^2+1}{2}$

التمرين الخامس:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = e^2 - 1$

و بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

كما يلي : $v_n = 3(1+u_n)$

معطيات التمرين : لدينا:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-2}$ وحدها الأول $v_0 = 3e^2$

*حدها العام هو: $v_n = v_0.q^n = 3e^2.e^{-2n} = 3e^{-2n+2}$

* بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

حل التمرين الخامس:

تبيان أن :

$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

بتوظيف الخاصية الأساسية للدالة اللوغاريتم النيبيري نجد :

$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n = \ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times .... \times v_n)$

ملاحظة مهمة: هذا الجداء للحدود متتابعة لمتتالية هندسية مهم جدا ويجب معرفة حسابه: $P = v_0 \times v_1 \times v_2 \times .... \times v_n$

وذلك باستعمال عبارة الحد العام لهذه المتتالية وكتابة جميع الحدود بدلالة الحد الأول v_0

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$v_0 \times v_1 \times v_2 \times v_3 .... \times v_n = \left(v_0 \times \underbrace{v_0.q^1}_{v_1} \times \underbrace{v_0.q^2}_{v_2} \times \underbrace{v_0.q^3}_{v_3} \times ... \times \underbrace{v_0.q^n}_{v_n} \right)$$

تكافئ:

$$\left(v_0 \times \underbrace{v_0.q^1}_{v_1} \times \underbrace{v_0.q^2}_{v_2} \times \underbrace{v_0.q^3}_{v_3} \times ... \times \underbrace{v_0.q^n}_{v_n} \right) = (v_0)^{n-0+1} \times q^{1+2+3+....+n}$$

مجموع متتالية حسابية حدها الأول $r=1$ أساسها :

$$1+2+3+.....+n = \frac{n+1}{2}(n) = \frac{n}{2}(n+1)$$

معناه:

$$P = v_0 \times v_1 \times v_2 \times v_3 .... \times v_n = v_0^{n+1} \times q^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

ومنه:

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n = \ln \left(v_0^{n+1} \times q^{\frac{n}{2}(n+1)} \right)$$

تكافئ:

$$\ln \left(\underbrace{v_0^{n+1} \times q^{\frac{n}{2}(n+1)}}_{v_0 \times v_1 \times v_2 \times .... \times v_n} \right) = \ln \left(\left(3e^2\right)^{n+1} \left(e^{-2}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)} \right)$$

تكافئ:

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n = \ln \left(\left(3e^2\right)^{n+1} (e)^{\frac{-2n}{2}(n+1)} \right)$$

تكافئ:

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n = \ln \left(\left(3e^2\right)^{n+1} (e)^{-n(n+1)} \right)$$

باستعمال خواص اللوغاريتم النيبيري نجد :

$$\ln \left(\underbrace{\left(3e^2\right)^{n+1} (e)^{-n(n+1)}}_{v_0 \times v_1 \times v_2 \times .... \times v_n} \right) = \ln \left(3e^2\right)^{n+1} + \ln (e)^{-n(n+1)}$$

تكافئ:

$$\ln \left(\underbrace{\left(3e^2\right)^{n+1} (e)^{-n(n+1)}}_{v_0 \times v_1 \times v_2 \times .... \times v_n} \right) = \ln \left(3^{n+1} e^{2(n+1)} \right) - n(n+1)$$

باستعمال خواص اللوغاريتم النيبيري نجد :

$$\ln \left(\underbrace{\left(3e^2\right)^{n+1} (e)^{-n(n+1)}}_{v_0 \times v_1 \times v_2 \times .... \times v_n} \right) = \ln 3^{n+1} + \ln e^{2(n+1)} - n(n+1)$$

تكافئ:

$$\ln \left(\left(3e^2\right)^{n+1} (e)^{-n(n+1)} \right) = (n+1)\ln 3 + 2(n+1) - n(n+1)$$

تكافئ:

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$$

وهو المطلوب.

التمرين السادس:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$

و بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$،

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

كما يلي : $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

معطيات التمرين : لدينا:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0 = -2$

* حدها العام هو: $v_n = -2\left(\frac{2}{5}\right)^n$

* أحسب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}$$

حل التمرين السادس:

حساب S_n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}$،

يكفي استخراج $\frac{1}{u_n}$ بدلالة v_n

لدينا من المعطيات : $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين السابع:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ب : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

كما يلي : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

معطيات التمرين : لدينا:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0 = -\dfrac{1}{2}$

*حدها العام هو: $v_n = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

* أحسب بدلالة n المجموع S_n و S'_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n$$

$$S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \ldots\ldots + \frac{1}{u_n + 2}$$

حل التمرين السابع:

أ- حساب S_n ، $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n$

(v_n) متتالية هندسية مجموعها: $S_n = v_0\left(\dfrac{1 - q^{n-0+1}}{1-q}\right)$

تكافئ: $S_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1-\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4}}\right)$

تكافئ: $S_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}\right)$

ب- حساب S' ، $S'_n = \dfrac{1}{u_0+2} + \dfrac{1}{u_1+2} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{u_n+2}$

بجب استخراج $\dfrac{1}{u_n+2}$ بحدالة v_n

لدينا من المعطيات : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

تكافئ: $v_n - 1 = -\dfrac{3}{u_n}$ تكافئ: $\dfrac{v_n - 1}{-3} = \dfrac{1}{u_n}$ تكافئ: $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{-v_n + 1}{3}$

تكافئ: $\dfrac{1}{u_n} = -\dfrac{1}{3}(v_n - 1)$

بجمع طرف لطرف نجد:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u_0} = -\dfrac{1}{3}(v_0 - 1) \\ \dfrac{1}{u_1} = -\dfrac{1}{3}(v_1 - 1) \\ \dfrac{1}{u_2} = -\dfrac{1}{3}(v_2 - 1) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \dfrac{1}{u_n} = -\dfrac{1}{3}(v_n - 1) \end{cases}$$

$$_n = -\frac{1}{3}\left[\left(_0 + _1 + _2 + \ldots\ldots\ldots + v_n\right) - 1\left(\ -0+1\right)\right]$$

لدينا: (v_n) متتالية هندسية مجموعها هو: $v_0\left(\dfrac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right)$

تكافئ: $S_n = -\dfrac{1}{3}\left[\left(v_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right) - 1(n+1)\right]$

تكافئ: $S_n = -\dfrac{1}{3}\left[\left(-2\left(\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}\right)\right) - n - 1\right]$

تكافئ: $S_n = -\dfrac{1}{3}\left[\left(-2\left(\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{3}{5}}\right)\right) - n - 1\right]$

تكافئ: $S_n = -\dfrac{1}{3}\left[-\dfrac{10}{3}\left(1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}\right) - n - 1\right]$

ملاحظة مهمة: يمكن حساب هذا المجموع بطريقة أخرى بحيث: $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{3}(1 - v_n)$ وبنفس طريقة الحساب العمومية نجد : $S_n = \dfrac{1}{3}\left[(n+1) + \dfrac{10}{3}\left(1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}\right)\right]$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ تكافئ: $v_n\left(u_n + 2\right) = u_n - 1$

تكافئ: $v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$ تكافئ: $v_n u_n - u_n = -2v_n - 1$

تكافئ: $u_n\left(v_n - 1\right) = -2v_n - 1$ تكافئ: $\boxed{u_n = \dfrac{-2v_n - 1}{v_n - 1}}$

معناه: $u_n + 2 = \dfrac{-2v_n - 1}{v_n - 1} + 2$

تكافئ: $u_n + 2 = \dfrac{-2v_n - 1 + 2v_n - 2}{v_n - 1}$

تكافئ: $u_n + 2 = \dfrac{-3}{v_n - 1}$ تكافئ: $\dfrac{1}{u_n + 2} = \dfrac{-v_n + 1}{3}$

تكافئ: $\boxed{\dfrac{1}{u_n + 2} = \dfrac{-v_n + 1}{3} = \dfrac{1}{3}\left(1 - v_n\right)}$

بجمع طرف لطرف نجد:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u_0 + 2} = \dfrac{1}{3}\left(1 - v_0\right) \\ \dfrac{1}{u_1 + 2} = \dfrac{1}{3}\left(1 - v_1\right) \\ \dfrac{1}{u_2 + 2} = \dfrac{1}{3}\left(1 - v_2\right) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \dfrac{1}{u_n + 2} = \dfrac{1}{3}\left(1 - v_n\right) \end{cases}$$

$$S_n' = \frac{1}{3}\left[1\left(n - 0 + 1\right) - \left(\underbrace{v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n}_{S_n}\right)\right]$$

تكافئ: $S_n' = \dfrac{1}{3}\left[n + 1 - S_n\right]$

تكافئ: $S_n' = \dfrac{1}{3}\left[n + 1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}\right)\right]$

تكافئ: $S_n' = \dfrac{1}{3}\left[n + 1 + \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}\right)\right]$

تكافئ: $S_n' = \dfrac{1}{3}\left[n + 1 + \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3\left(4^{n+1}\right)}\right]$

تكافئ: $S_n' = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{3n + 3 + 2}{3} - \dfrac{2}{3\left(4^{n+1}\right)}\right]$

تكافئ: $S_n' = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{3n + 5}{3} - \dfrac{2}{3\left(4^{n+1}\right)}\right]$

تكافئ: $S_n' = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{3}\left(3n + 5 - \dfrac{2}{\left(4^{n+1}\right)}\right)\right]$

تكافئ: $\boxed{S_n' = \dfrac{1}{9}\left(3n + 5 - \dfrac{2}{\left(4^{n+1}\right)}\right)}$

التمرين الثامن:

$\left(u_n\right)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$

و: $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 16}{u_n + 11}$

ولتكن $\left(v_n\right)$ المتتالية المعرفة كما يلي: $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

معطيات التمرين: لدينا:

$\left(v_n\right)$ متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{4}$

* أحسب بدلالة n المجموع S :

$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \ldots\ldots + v_{2016} \times u_{2016}$$

حل التمرين الثامن:

حساب S_n ، $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \ldots\ldots + v_{2016} \times u_{2016}$

لدينا من المعطيات: $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

بجمع طرف لطرف نجد:

$$\begin{cases} v_0 \times u_0 = 1 - 4v_0 \\ v_1 \times u_1 = 1 - 4v_1 \\ v_2 \times u_2 = 1 - 4v_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_{2016} \times u_{2016} = 1 - 4v_{2016} \end{cases}$$

$$S = 1(2016 - 0 + 1) - 4(\underbrace{v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n}_{\text{حسابية}})$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{4}$

مجموعها هو: $\frac{2016-0+1}{2}(v_0+v_{2016})$

المجموع: (عدد الحدود ÷ 2) × (الحد الأول + الحد الأخير)

تكافئ: $S=1(2016-0+1)-4\left(\frac{2017}{2}(v_0+v_{2016})\right)$

تكافئ: $S=2017-4\left(\frac{2017}{2}\left(\frac{1}{4}+v_{2016}\right)\right)$

حساب v_{2016} : لدينا:

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{4}$

معناه حدها العام هو: $v_n=v_0+(n-0)r$

تكافئ: $v_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}n$ تكافئ: $v_{2016}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}(2016)$

تكافئ: $v_{2016}=288$ تكافئ: $S=2017-4\left(\frac{2017}{2}\left(\frac{1}{4}+288\right)\right)$

تكافئ: $S=-1161792$

التمرين التاسع:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=5$

بالعبارة: $u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{u_n+3}$

و لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

معطيات التمرين : لدينا:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\frac{2}{3}$

* أحسب بدلالة n المجاميع S_n و S'_n :

$$S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$$

$$S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+\dots\dots+\frac{1}{u_{n+2016}+1}$$

حل التمرين التاسع:

أ- حساب S_n :

$$S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$$

*حدها العام للمتتالية (v_n) هو: $v_n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(v_n) متتالية هندسية مجموعها: $S_n=v_n\left(\frac{1-q^{n+2016-n+1}}{1-q}\right)$

تكافئ: $S_n=v_n\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{\frac{1}{2}}\right)$

تكافئ: $S_n=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right)$

تكافئ: $S_n=\left(\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right)$

تكافئ: $S_n=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2017}$

ملاحظة مهمة: قمنا في هذه الحالة بتبسيط الحساب لأنه يوجد مجموع آخر S'_n ممكن تكون له علاقة مع هذا المجموع

ب- حساب S'_n : $S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+\dots\dots+\frac{1}{u_{n+2016}+1}$

يجب استنتاج $\frac{1}{u_n+1}$ بدلالة v_n

لدينا من المعطيات: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

$-1=1-2$

تكافئ: $v_n=\frac{u_n+1-2}{u_n+1}$ تكافئ: $v_n=\frac{u_n+1}{u_n+1}-\frac{2}{u_n+1}$

تكافئ: $v_n=1-\frac{2}{u_n+1}$ تكافئ: $v_n-1=-\frac{2}{u_n+1}$

تكافئ: $-v_n+1=\frac{2}{u_n+1}$ تكافئ: $\frac{1}{u_n+1}=\frac{1-v_n}{2}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\frac{1}{u_n+1}=\frac{1-v_n}{2}$$ تكافئ:

$$\frac{1}{u_n+1}=\frac{1-v_n}{2}=\frac{1}{2}(1-v_n)$$ تكافئ:

بجمع طرف لطرف نجد:

$$\begin{cases}\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{2}(1-v_n)\\ \frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{2}(1-v_{n+1})\\ \vdots\ \vdots\ \vdots\\ \vdots\ \vdots\ \vdots\\ \frac{1}{u_{n+2016}+1}=\frac{1}{2}(1-v_{n+2016})\end{cases}$$

$$S_n'=\frac{1}{2}\left[1(n+2016-n+1)-\left(\underbrace{v_n+v_{n+1}+\ldots\ldots\ldots+v_{n+2016}}_{S_n}\right)\right]$$

$$S_n'=\frac{1}{2}(2017)-\frac{1}{2}S_n$$ تكافئ: $$S_n'=\frac{1}{2}\left[2017-S_n\right]$$ تكافئ:

$$S_n'=\frac{1}{2}(2017)-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2017}\right)\right]$$ تكافئ:

$$S_n'=\frac{1}{2}(2017)-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2017}$$ تكافئ:

$$S_n'=\frac{1}{2}(2017)-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2018}$$ تكافئ:

التمرين العاشر:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$

بالعبارة التراجعية: $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

و لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

كما يلي: $v_n=e^{u_n}$ تكافئ: $u_n=\ln(v_n)$

معطيات التمرين: لدينا:

(v_n) متتالية حسابية أساسها: $r=2$

وعبارة حدها العام: $v_n=2n+1$

معناه: $u_n=\ln(2n+1)$

* أحسب بدلالة n المجاميع S_n و T :

$$S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+\ldots.+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

$$T=e^{u_{1441}}+e^{u_{1442}}+\ldots.+e^{u_{2020}}$$

حل التمرين العاشر:

أ- حساب S_n : $S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+\ldots.+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$

باستعمال خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري نجد:

من أجل a و b عددين حقيقيين من $]0;+\infty[$

لدينا: $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

ومنه:

$$S_n=\ln(v_1)-\ln(v_0)+\ln(v_2)-\ln(v_1)\ldots.+\ln(v_n)-\ln(v_{n-1})$$

معناه:

بجمع طرف لطرف نجد:

$$\begin{cases}\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)=\cancel{\ln(v_1)}-\ln(v_0)\\ \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)=\cancel{\ln(v_2)}-\cancel{\ln(v_1)}\\ \ln\left(\frac{v_3}{v_2}\right)=\cancel{\ln(v_3)}-\cancel{\ln(v_2)}\\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\\ \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)=\ln(v_n)-\cancel{\ln(v_{n-1})}\end{cases}$$

$$S_n=-\ln(v_0)+\ln(v_n)$$

لدينا: $v_n=2n+1$ معناه: $v_0=2(0)+1=1$ ومنه: $v_0=1$

ومن جهة أخرى: $u_n=\ln(v_n)$

معناه: $S_n=-\ln(1)+u_n$ ومنه: $S_n=u_n$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

به- حساب T ، $T = e^{u_{1441}} + e^{u_{1442}} + ... + e^{u_{2020}}$

ومنه: $T = v_{1441} + v_{1442} + ... + v_{2020}$

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $v_0 = 1$

مجموعها هو: $T = \frac{2020 - 1441 + 1}{2}(v_{1441} + v_{2020})$

المجموع: (عدد الحدود ÷ 2) × (الحد الأول + الحد الأخير)

حساب v_{1441} : لدينا: $v_{1441} = 2(1441) + 1 = 2883$

حساب v_{2020} : لدينا: $v_{1441} = 2(2020) + 1 = 4041$

ومنه : $T = \frac{2020 - 1441 + 1}{2}(2883 + 4041)$

يكافئ : $T = \frac{580}{2}(6924)$ يكافئ : $T = 290(6924)$

ومنه : $T = 2007960$

بالتوفيق والنجاح في بكالوريا دورة سبتمبر 2020



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com