# ملخص الدالة الأسية

**تعريف :** الدالة $f$ التي هي معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرطين الآتيين :

$f' = f$ و $f(0) = 1$ تسمى الدالة الأسية و نرمز لها بـ : $\exp(x)$ أو بالكتابة المبسطة $e^x$.

**خواص:** من أجل كل عددين حقيقيين $x$، $y$ و من أجل كل عدد صحيح $n$ .

1) $e^{x+y} = e^x.e^y$ ، 2) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ ، 3) $e^{nx} = (e^x)^n$ ، 4) $e^x > 0$

5) $e^x = e^y$ معناه $x = y$، 6) $e^x < e^y$ معناه $x < y$ ، 7) $e^x > e^y$ معناه $x > y$

8) $e^0 = 1$ ، 9) $x > 0$ يكافئ $e^x > 1$ ، 10) $x < 0$ يكافئ $0 < e^x < 1$

## دراسة الدالة الأسية :

الدالة $x \longrightarrow e^x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $(e^x)' = e^x$ بصفة عامة إذا كانت الدالة $u$ قابلة للإشتقاق على $D$ فإنه من أجل كل $x \in D$ : $\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x) \times e^{u(x)}$

## النهايات :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ، $\lim\limits_{u(x) \to +\infty} e^{u(x)} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{u(x) \to -\infty} u(x) \times e^{u(x)} = 0$ ، $\lim\limits_{u(x) \to -\infty} e^{u(x)} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad$ تعميم : $\lim\limits_{u(x) \to 0} \dfrac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\quad$ تعميم : $\lim\limits_{u(x) \to +\infty} \dfrac{e^{u(x)}}{u(x)} = +\infty$

**ملاحظات :** 1) من أجل $\alpha \in \mathbb{N}^*$ فإن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^x = 0$

2) $\ln e^{u(x)} = u(x)$ ، $e^{\ln u(x)} = u(x)$

## دراسة إشارة العبارات الأسية :

**الحالة الأولى** هنا الإشارة من إشارة الدّالة $f$ $\left[f(x) \times e^{u(x)}\right]$

**الحالة الثانية** العبارة من الشكل : $ae^{\alpha x+\beta} + b$ حيث $a$ ، $b$ ، $\alpha$ ، $\beta$ أعداد حقيقية مع $a\alpha \neq 0$ .

1) إذا كان $a$ و $b$ موجبين فإن $ae^{\alpha x+\beta} + b > 0$ .

2) إذا كان $a$ و $b$ سالبين فإن $ae^{\alpha x+\beta} + b < 0$ .

3) إذا كان $a$ و $b$ مختلفين في الإشارة فإن المعادلة $ae^{\alpha x+\beta} + b = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ و الإشارة كمايلي

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ae^{\alpha x+\beta} + b$ | مخالف لإشارة $a\alpha$ | | موافق لإشارة $a\alpha$ |

## التمرين الاول

**بسط العبارات التالية:**

1) $(e^x)^2 \times e^{-3x}$ ، 2) $\dfrac{e^{-2x+1}}{e^{2x}}$ ، 3) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-2x}}$

## التمرين الثاني

**أثبت صحة المساواة في كل حالة مما يلي**

1) $\dfrac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1} = \dfrac{1-e^{-3x}}{1+e^{-3x}}$ ، 2) $e^{-x} - e^{-2x} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$

3) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ، 4) $(e^x + e^{-x})^2 = \dfrac{(e^{2x}+1)^2}{e^{2x}}$

## التمرين الثالث

✓ **حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :**

1) $e^{-2x} + 1 = 0$ ، 2) $e^{-3x+6} - 1 = 0$ ، 3) $e^{2x-1} - e = 0$

4) $e^{4x} = e^{x-1}$ ، 5) $e^{2x+1}.e^{2x} = e^{3x-4}$ ، 6) $e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}}$

7) $e^{-x^2} = \dfrac{1}{e}$ ، 8) $e^{-x^2} = \dfrac{1}{e^{3x-4}}$ ، 9) $\dfrac{e^{x+4}}{e^{-x+6}} = e^{\frac{1}{x}}$

10) $e^{-3x+4} - (e^x)^{-4} = 0$ ، 11) $e^{2x} = 2 - e^x$

✓✓ **حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :**

1) $e^{3x+6} < 0$ ، 2) $e^{2x^2} \leq e^{5x+3}$ ، 3) $e^x < e^{-2x}$

4) $e^{2x^2} > e^{5x+3}$ ، 5) $e^{x+1} > e^{\frac{-2}{x}}$ ، 6) $e^{2x} + 3e^x - 4 > 0$

## التمرين الرابع

**أدرس إشارة كل من العبارات التالية :**

$A(x) = 2e^{x+1} + 3$ ، $B(x) = -2e^{-x+1} - 5$

$C(x) = 2e^{x+3} - 4$ ، $D(x) = e^{-2x+1} - 1$

$E(x) = (x^2 + x - 2)e^{3-x}$ ، $K(x) = e^{2x} + e^x - 6$

$G(x) = e^{2x} - 7e^x + 12$

## التمرين الخامس

**أحسب مشتقات الدوال التالية**

1) $f(x) = (2x+1)e^x - 1$ ، 2) $g(x) = x - (x+1)e^{-x} + 3$

3) $h(x) = e^x - ex - 1$ ، 4) $t(x) = \dfrac{2x+2}{e^x+2}$

5) $k(x) = \dfrac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$ ، 6) $G(x) = x - 1 + \dfrac{4}{e^x + 1}$

7) $e(x) = (-3x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$

## التمرين السادس

**أحسب النهايات التالية**

1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-3x}+1$ ، 2) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}-x+4$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x}-x$ ، 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+4)e^{x}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2+x}$ ، 8) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x+3)e^{x}$ 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3e^{x}-2}{e^{x}+1}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}+1}{e^{x}+1}$ ، 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{3}$ ، 12) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{2x}$ ، 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$ 15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^{-x}}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-4x}}{x}$ ، 17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-x-1}{x^2}$

### المسألة الأولى

❖ $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ .

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن : $0,36<\alpha<0,37$

3) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

❖❖ $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) بيّن أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$

ب) استنتج أن الدالة $f$ متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$

2) أحسب نهاية $f$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

3) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=0$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

4) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=-x+1$ .

5) أنشئ $(\Delta)$ و $(C_f)$ على المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$ .

### المسألة الثانية

❖ $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=(x+2)e^{x}-2$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج اشارة $g(x)$ .

❖❖ $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

1) بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = -g(x)$

ب) إستنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

جـ) بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$ ثم أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ .

3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث :

$0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,56 < \beta < -1,55$

ب)أرسم المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$ على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

## المسألة الثالثة

❖ نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = -4 + (4-2x)e^x$

1) أدرس تغيرات الدالة $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

2)بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الاخر $\alpha$ حيث: $1,59 < \alpha < 1,6$

3) استنتج إشارة $g(x)$

❖❖ $f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{2x-2}{e^x - 2x}$

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

) بيّن أن $(C_f)$ يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$ .

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$

ب) استنتج اشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

جـ) أحسب $f(1)$، ثم استنتج حسب قيم $x$ إشارة $f(x)$ .

3) أ) بيّن أن: $f(\alpha) = -1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ حيث : $\alpha$ هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء الاول.

ب) إستنتج حصر للعدد $\alpha$ ( تدور النتائج إلى $10^{-2}$ )

جـ) أرسم $(C_f)$ .

4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط $m$ ، عدد و إشارة حلول المعادلة : $2x - 2 = (e^x - 2x)(m+1)$

5) $h$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = \left[f(x)\right]^2$

أ) أحسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$ .

ب) شكل جدول تغيرات الدالة $h$ .

## المسألة الرابعة

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$ يطلب تعيين معادلة له .

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها .

2) أكتب معادلة $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 2 .

3) $h$ الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي : $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$

أدرس إتجاه تغير الدالة $h$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ على المجال $[0;+\infty[$ .

4) أرسم المماس $(T)$ و المنحنى $(C_f)$ على المجال $[0;+\infty[$ .

5) نعتبر $m$ وسيط حقيقي و المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ الموجب : $(E).....f(x)=m(x-2)$

❖ ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة $(E)$

6) $g$ الدالة المعرفة علة المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

إعتمادا على السؤال رقم $(1)$ ، شكل جدول تغيرات الدالة $g$ .

najah213.com
نجاح 213

# حلول المسائل

## حل المسألة الأولى

I) $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) **دراسة اتجاه تغيّر الدالة** $g$.

الدالة $g$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=-2-2e^{2x-2}=-2\left(1+e^{2x-2}\right)$.

من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $g'(x)<0$ ومنه الدالة $g$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) **تبيين أن المعادلة** $g(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** $\alpha$ **في** $\mathbb{R}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-2x-e^{2x-2}=+\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-2x-e^{2x-2}=\lim_{x\to+\infty}(2x-2)\left(\frac{1-2x}{2x-2}-\frac{e^{2x-2}}{2x-2}\right)=-\infty$$

ومنه الدالة $g$ مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي $k$ المعادلة $g(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ وبالأخص المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$.

**التحقق أنّ** $0,36<\alpha<0,37$.

$g(0,36)\approx 0,002$ و $g(0,37)\approx -0,02$ إذن $g(0,36)\times g(0,37)<0$ ومنه $0,36<\alpha<0,37$.

3) **استنتاج إشارة** $g(x)$ **على** $\mathbb{R}$.

لدينا الدالة $g$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

إذا كان $x<\alpha$ فإن $g(x)>g(\alpha)$ أي $g(x)>0$.

إذا كان $x>\alpha$ فإن $g(x)<g(\alpha)$ أي $g(x)<0$ ؛ كما أنّ $g(\alpha)=0$.

II) $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

1) **أ) تبيين أنّ** $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب) إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g(-x)$.

إذا كان $x<-\alpha$ فإن $-x>\alpha$ ومنه $g(-x)<0$ أي $f'(x)<0$.

إذا كان $x>-\alpha$ فإن $-x<\alpha$ ومنه $g(-x)>0$ أي $f'(x)>0$.

وبالتالي الدالة $g$ متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha[$ ومتزايدة تماما على $]-\alpha;+\infty[$.

2) **حساب نهاية** $f$ **عند** $+\infty$ **و** $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x+2}-x+1=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

najah213.com · نجاح 213

**جدول تغيّرات الدالة $f$.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(-\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

3) **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=\lim_{x\to-\infty}xe^{2x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}=0$$

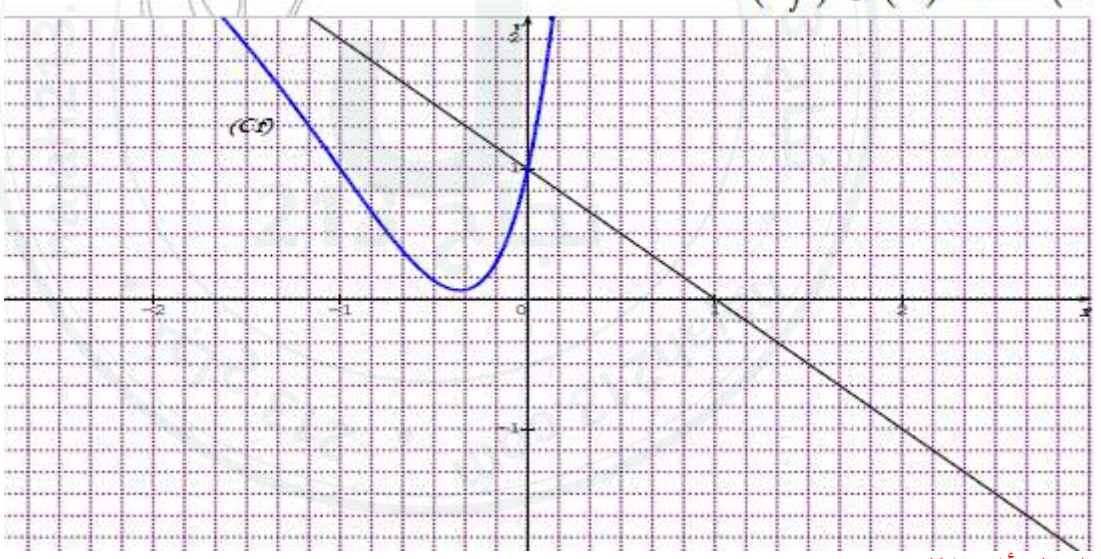
ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=-x+1$ بجوار $-\infty$.

4) **دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.**

$f(x)+x-1=xe^{2x+2}$؛ من أجل كل عدد حقيقي $x$، $e^{2x+2}>0$ ومنه إشارة $f(x)+x-1$ هي نفس إشارة $x$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)+x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضعية | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | | $(C_f)$ و $(\Delta)$ يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(0;1)$. | | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

5) **انشاء $(\Delta)$ و $(C_f)$.**




## حل المسألة الثانية

**I)** $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x+2)e^{x}-2$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}+2e^{x}-2=-2$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{x}-2=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$.

2) **دراسة اتجاه تغير الدالة $g$.**

الدالة $g$ تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=e^{x}+(x+2)e^{x}=e^{x}(x+3)$.

من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $e^{x}>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(x+3)$.

من أجل $x\in]-\infty;-3[$ يكون $g'(x)<0$ ومنه الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-3[$.

و من أجل $x\in]-3;+\infty[$ يكون $g'(x)>0$ ومنه الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]-3;+\infty[$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

وجدول تغيّراتها يكون كما يلي:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $g(x)$ | $-2$ | ↘ | $-e^{-3}-2$ | ↗ | $0$ | | $+\infty$ |

$g(0)=(0+2)e^0-2=0$

**استنتاج إشارة $g(x)$.**

من أجل $x\in]-\infty;0[$: $g(x)<0$ ومن أجل $x\in]0;+\infty[$: $g(x)>0$ و $g(0)=0$.

II) $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x+3-(x+1)e^x$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left(\dfrac{2x+3}{x+1}-e^x\right)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+1}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x+e^x=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x+3-(x+1)e^x=-\infty$.

2) **تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x)=-g(x)$.**

$f'(x)=2-\left[e^x+e^x(x+1)\right]=2-e^x(x+2)=-g(x)$

**ب) استنتاج إشارة $f'(x)$.**

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-\infty;0[$: $g(x)<0$ ومنه $f'(x)>0$

ومن أجل $x\in]0;+\infty[$: $g(x)>0$ ومنه $f'(x)<0$ ، $f'(0)=0$.

**جدول تغيرات الدالة $f$.**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

**جـ) تبيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$.**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-(x+1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^x-e^x=0$

ومنه المستقيم $(\Delta)$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$.

**دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.**

لدينا $f(x)-(2x+3)=-(x+1)e^x=(-x-1)e^x$

ومنه إشارة $f(x)-(2x+3)$ هي نفس إشارة $(-x-1)$ لأن $e^x>0$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$.

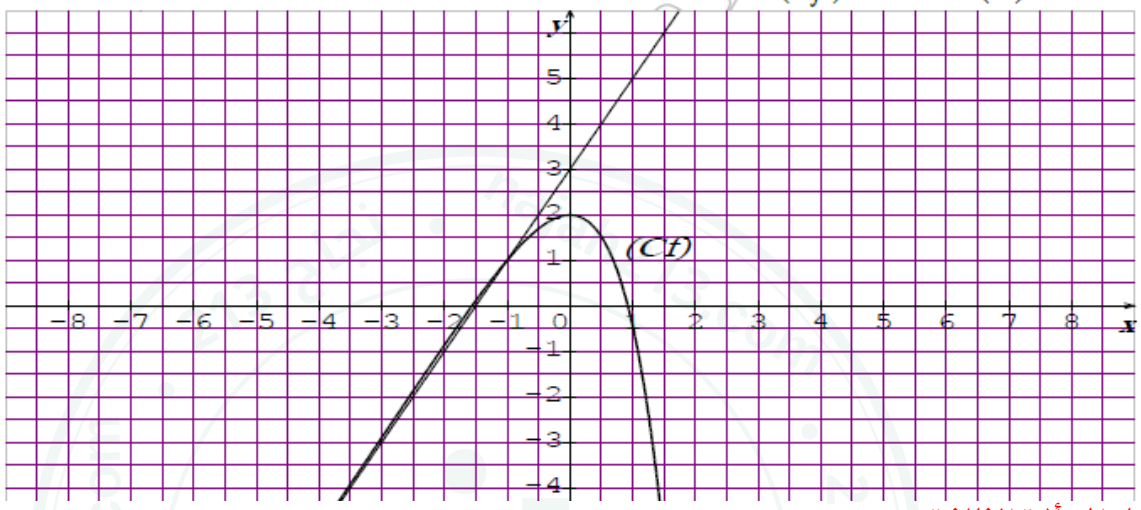
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-(2x+3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضعية | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | | $(C_f)$ و $(\Delta)$ يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;1)$ | | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

3) أ) **تبيين أن المعادلة** $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث: $0,92<\alpha<0,93$ و $-1,56<\beta<-1,55$.

الدالة $f$، مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ وبالخصوص على المجال $[-1,56;-1,55]$ و $f(-1,56)\approx-0,002$ و $f(-1,55)\approx 0,17$ أي $f(-1,55)\times f(-1,56)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\beta$ من المجال $]-1,56;-1,55[$ بحيث $f(\beta)=0$.

وكذلك، الدالة $f$ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,92;0,93]$ و $f(0,92)\approx 0,02$ و $f(0,93)\approx-0,03$ أي $f(0,93)\times f(0,92)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $]0,92;0,93[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

ب) **رسم** $(\Delta)$ **والمنحنى** $(C_f)$.




## حل المسألة الثالثة

**I-** لدينا : $g(x)=-4+(4-2x)e^x$ ، حيث $D_g=\mathbb{R}$ .

**1.** دراسة تغيرات الدالة $g$ .

- **النهايات :** $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4+(4-2x)e^x\right)=-4$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4+(4-2x)e^x\right)=-\infty$ .

- **المشتق وإشارته :** من أجل كل عدد حقيقي لدينا $g'(x)=-2e^x+(4-2x)e^x=2(1-x)e^x$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

- **جدول التغيرات .**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-4$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

$g(0)=-4+(4-2\times0)e^0=0$

**2.** إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين .

بما أن $g(0)=0$ فإن العدد $0$ حل للمعادلة $g(x)=0$ .

ولدينا الدالة $g(x)$ معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1,59;1,60]$ .

و $g(1,59)=0,02$ ، $g(1,60)=-0,04$ أي $g(1,59)\times g(1,60)<0$ .

ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ حيث : $1,59<\alpha<1,60$ .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

3. استنتاج إشارة $g(x)$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

II- لدينا : $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$ ، حيث $D_f=\mathbb{R}$ .

1. إثبات أن $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين .

- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-2}{e^x-2x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{2x}{2x}\right)=-1$ .

وبالتالي : $(C_f)$ يقبل بجوار $(-\infty)$ مقارب أفقي معادلته $y=-1$ .

- ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-2}{e^x-2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2.\dfrac{x}{e^x}\right)=0$ .

وبالتالي : $(C_f)$ يقبل بجوار $(+\infty)$ مقارب أفقي معادلته $y=0$ .

2. أ- حساب $f'(x)$ .

من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $f'(x)=\dfrac{2(e^x-2x)-(e^x-2)(2x-2)}{(e^x-2x)^2}=\dfrac{2e^x-4x+4x-4-(2x-2)e^x}{(e^x-2x)^2}$ .

أي : $f'(x)=\dfrac{-4+(4-2x)e^x}{(e^x-2x)^2}$ .

ومنه : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

ب- استنتاج إشارة $f'(x)$ .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ .

- جدول تغيرات الدالة $f$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

$f(0)=\dfrac{2\times0-2}{e^0-2\times0}=-2$

ج- حساب $f(1)$ ، ثم استنتاج ، حسب قيم $x$ ، إشارة $f(x)$ .

لدينا : $f(1)=\dfrac{2\times1-2}{e^1-2\times1}=0$ .

بالاستعانة بجدول التغيرات نستنتج : $f(x)<0$ لما $x\in]-\infty;1[$ و $f(x)>0$ لما $x\in]1;+\infty[$ .

3. أ- كتابة $f(\alpha)$ بدلالة $\alpha$ .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha}$ ، ولدينا : $-4+(4-2\alpha)e^{\alpha}=0$ ، أي : $e^{\alpha}=\dfrac{2}{2-\alpha}$ .

إذن : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha-2}{\dfrac{2}{2-\alpha}-2\alpha}$ ، أي : $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}$ ، ومنه : $f(\alpha)=\dfrac{1-\alpha+1}{\alpha-1}=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ .

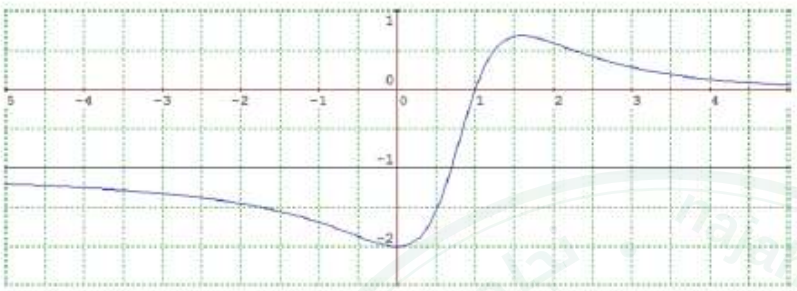
**ب- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .**

لدينا : $1,59<\alpha<1,60$ إذن : $0,59<\alpha-1<0,60$ .

وبالتالي : $\dfrac{1}{0,60}<\dfrac{1}{\alpha-1}<\dfrac{1}{0,59}$ .

أي : $-1+\dfrac{1}{0,60}<-1+\dfrac{1}{\alpha-1}<-1+\dfrac{1}{0,59}$ .

ومنه $0,66<f(\alpha)<0,69$ .



**جـ- رسم $(C_f)$ .**

- $(1;0)$ و $(0;-2)$ نقطتي تقاطع مع محوري الفواصل والتراتيب .
- $y=-1$ و $y=0$ معادلتي مقاربين أفقيين للمنحنى $(C_f)$ .

**4. المناقشة البيانية لحلول المعادلة .**

لدينا : $2x-2=(e^x-2x)(m+1)$ ، وبالتالي : $\dfrac{2x-2}{e^x-2x}=m+1$ ، إذن : $\begin{cases}y=f(x)\\y=m+1\end{cases}$ .

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم ذو المعادلة $y=m+1$ ، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ .

- لما $m+1<-2$ أي $m<-3$ لا توجد حلول للمعادلة .
- لما $m=-3$ للمعادلة حل مضاعف $x=0$ .
- لما $-2<m+1<-1$ أي $-3<m<-2$ للمعادلة حلين أحدهما موجب وآخر سالب .
- لما $-2\le m<-1$ للمعادلة حل وحيد موجب .
- لما $m=-1$ للمعادلة حل وحيد معدوم .
- لما $0<m+1<f(\alpha)$ أي $-1<m<-2+\dfrac{1}{\alpha-1}$ للمعادلة حلين متمايزين موجبين .
- لما $m=-2+\dfrac{1}{\alpha-1}$ للمعادلة حل مضاعف موجب $x=\alpha$ .
- لما $m>-2+\dfrac{1}{\alpha-1}$ لا توجد حلول للمعادلة .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | | + | $0$ | - | |
| $f(x)$ | | | - | | $0$ | | + | | |
| $h'(x)$ | | + | $0$ | - | $0$ | + | $0$ | - | |

**5. لدينا $h(x)=[f(x)]^2$ ، حيث $D_h=\mathbb{R}$ .**

**أ- حساب $h'(x)$ .**

من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $h'(x)=2.f'(x).f(x)$ .

– إشارة $h'(x)$ .

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(x).f(x)$ . أنظر الجدول أعلاه .

ب– جدول تغيرات الدالة $h$ .

جدول تغيرات الدالة $h$ بالشكل المقابل .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $4$ | ↘ | $0$ | ↗ | $f^2(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

## حل المسألة الرابعة

$f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$

1- أ- حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)e^{-x+1}=+\infty$ . و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)e^{-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{e^{x-1}}=0$ .

و منه $y=0$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي للمنحنى $(C_f)$ جهة $+\infty$ .

ب-إثبات أن عبارة المشتقة هي $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$ :

نحسب المشتقة $f'(x)=(-3x^2+4x)e^{-x+1}-(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$ و منه $f'(x)=(x^3-5x^2+4x)e^{-x+1}$ أي ان $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$ محققة .

استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ : إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x^2-5x+4)$

لدينا $(x^2-5x+4)$ له جذرين هما 1 و 4

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| اشارة $(x^2-5x+4)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| اشارة $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| اشارة $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

و منه $f$ متزايدة على المجالين $[0;1]$ و $[4;+\infty[$ متناقصة على المجالين $]-\infty;0]$ و $[1;4]$ .

جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-32e^{-3}$ | ↗ | $0$ |

2- كتابة معادلة $(T)$ المماس للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 2 هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$f'(2)=-4e^{-1}$ و $f(2)=0$ و منه معادلة المماس $(T)$ هي $y=-\frac{4}{e}x+\frac{8}{e}$ .

3- $h$ دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ $h(x)=x^2.e^{-x+2}-4$

دراسة تغيرات الدالة $h$ : $h'(x)=2x.e^{-x+2}-x^2.e^{-x+2}=x(2-x)e^{-x+2}$ إشارتها من إشارة $(2-x)$

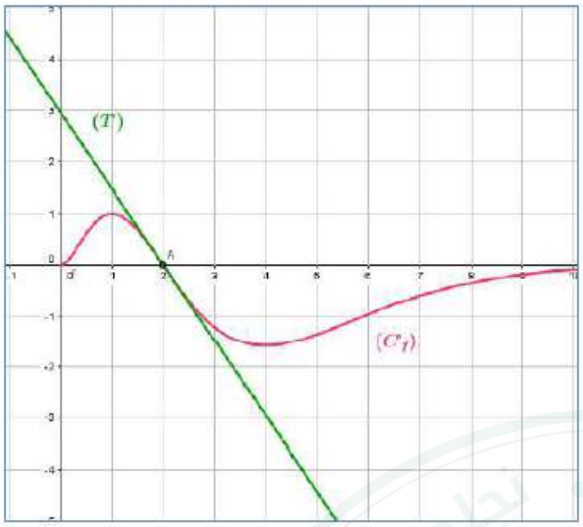
و منه فهي موجبة على المجال $[0;2]$ و سالبة على المجال $]2;+\infty[$ و منه الدالة $h$ متزايدة على المجال $[0;2]$ و متناقصة على المجال $]2;+\infty[$ و لدينا $h(2)=0$ إذن $h(2)=0$ قيمة حدية كبرى و منه $h(x)$ إشارتها سالبة .

تحديد وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ على المجال $[0;+\infty[$ :

$f(x)-y=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}+4e^{-1}x-8e^{-1}=-x^3.e^{-x+1}+2x^2.e^{-x+1}+4xe^{-1}-8e^{-1}$ و منه

$f(x)-y=-x^3.e^{-x+1}+4x.e^{-1}+2x^2.e^{-x+1}-8e^{-1}=-xe^{-1}(x^2.e^{-x+2}-4)+2e^{-1}(x^2e^{-x+2}-4)$ أي ان

$f(x)-y=(x^2.e^{-x+2}-4)(-x+2)e^{-1}$ أي ان $f(x)-y=h(x)(-x+2)e^{-1}$ بما أن إشارة $h(x)$ سالبة ومنه اشارة الفرق من إشارة $(x-2)$ أي ان $(C_f)$ يقع فوق $(T)$ على المجال $[0;2[$ و $(C_f)$ يقع تحت $(T)$ على المجال $]2;+\infty[$ و يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2 .




4- رسم المنحنى البياني $(C_f)$ و المماس $(T)$ :

5- المناقشة بيانيا :

المعادلة $f(x)=m(x-2).....(E)$ حلها هو ايجاد فواصل نقاط تقاطع $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta_m)$ ذو المعادلة $y=m(x-2)$ .

لما $m\in\left]-\infty;-\frac{4}{e}\right[$ نلاحظ أن $(C_f)$ و $(\Delta_m)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة $(E)$ حل وحيد .

لما $m\in\left]-\frac{4}{e};0\right[$ نلاحظ أن $(C_f)$ و $(\Delta_m)$ يتقاطعان في ثلاثة نقاط و منه للمعادلة $(E)$ ثلاثة حلول.

لما $m=0$ نلاحظ أن $(C_f)$ و $(\Delta_m)$ يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة $(E)$ حلين .

لما $m\in]0;+\infty[$ نلاحظ أن $(C_f)$ و $(\Delta_m)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة $(E)$ حل وحيد .

6- لدينا $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ من السؤال رقم (1) بوضع $t=\frac{1}{x}$

و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} t=0$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} t=+\infty$ نجد $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{t\to0} f(t)=-\infty$ .

المشتقة : هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$ و منه $g'(x)=-\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{x^2}-5\frac{1}{x}+4\right)e^{-\frac{1}{x}+1}$ أي $g'(x)=\frac{1}{x^5}\left(-1+5x-4x^2\right)e^{-\frac{1}{x}+1}$ و اشارته منه اشارة $\left(-1+5x-4x^2\right)$ و لها جذرين هما 1 و $\frac{1}{4}$

و منه $g$ متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{4};1\right]$ و متناقصة على المجالين $]1;+\infty[$ : $\left]0;\frac{1}{4}\right]$

و $g(1)=f(1)$ . $g\left(\frac{1}{4}\right)=f(4)$

بالتوفيق لطلبة بكالوريا 2021

مع تحيات الأستاذ قرايدية سمير