1 ملخص : الأعداد الطبيعية و الأعداد الناطقة

لإيجاد القاسم الأكبر المشترك PGCD للعددين a و b

نتبع الخطوات التالية (حيث $a > b$) :

❖ خوارزمية إقليدس :

1) ننجز عملية القسم الإقليدية لـ a على b نسمي الباقي r_1 و الحاصل q_1 .

2) ننجز عملية القسمة الإقليدية لـ b على r_1 نسمي الباقي r_2 و الحاصل q_2 . وهكذا يكون PGCD لـ b و a آخر باقي غير معدوم .

مثال : أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1078 و 322 باستعمال خوارزمية اقليدس

$1078 = 3 \times 322 + 112$
$322 = 2 \times 112 + 98$
$112 = 1 \times 98 + 14$
$98 = 14 \times 7 + 0$

$PGCD(1078; 322) = 14$

	a	b	الباقي
1	1078	322	112
2	322	112	98
3	112	98	14
4	98	14	0

للإثبات أن عددان هما أوليان فيما بينهما ، نتبع الخطوات التالية

1) نحسب PGCD لهذين العددين .

2) إذا كان PGCD يساوي 1 ، فنقول عن العددين أنهما اوليان فيما بينهما .

مثال : اثبث أن العددان 19 و 27 أوليان فيما بينهما

$27 = 19 \times 1 + 8$
$19 = 8 \times 2 + 3$
$8 = 3 \times 2 + 2$
$3 = 2 \times 1 + 1$
$2 = 1 \times 2 + 00$

$PGCD(27; 19) = 1$

	a	b	الباقي
1	27	19	8
2	19	8	3
3	8	3	2
4	3	2	1
5	2	1	0

للحصول على كسر غير قابل للإختزال مباشرة بعد عملية اختزال واحدة ، نتبع الخطوات التالية :

1) نحسب PGCD لكل من البسط و المقام

2) نقسم كلا من البسط و المقام على PGCD

3) نتحقق كلا من البسط و المقام لكسر المختزل انهما عددان اوليان فيما بينهما .

مثال : اختزل الكسر $\frac{60}{45}$ ليصبح كسر غير قابل للاختزال

بعد اتباع الخطوات السابقة نجد أن : $PGCD(60;45) = 15$

و منه : $\frac{60}{45} = \frac{4\times15}{3\times15} = \frac{4}{3}$ و بما أن : $PGCD(4;3) = 1$

فإن : $\frac{4}{3}$ غير قابل للإختزال .

تذكير بالمكتسبات القبلية

$\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k}$	$\frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k}$
$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$	$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}$
$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$	$\frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$

مثال 01 : أحسب العبارة التالية ثم اختزل ان أمكنك ذلك

$A = \frac{2}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{8}{21} = \frac{6}{49}$; $B = \left(\frac{7}{6} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{1}{3}$

مثال 02 : أعط الكتابة العلمية لـ A و B

$A = 5,2 \times 10^{-3} + 6,4 \times 10^{-2} + 0,0034$
$A = 7,26 \times 10^{-2}$

$B = \frac{5 \times 10^2 + 3 \times 10^3}{1,4 \times 10^{-4}} = 2,50 \times 10^7$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

2 ملخص : العمليات على الجذور التربيعية

خواص جذور التربيعية

$\sqrt{a^2} = a$	$(\sqrt{a})^2 = a$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\sqrt{ab^2} = \sqrt{a} \times \sqrt{b^2} = b\sqrt{a}$$

لحل المعادلات من الشكل $x^2 = a$ ، نتبع مايلي :

1) إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة لها حلان : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
2) إذا كان $a = 0$ فإن المعادلة لها حل وحيد هو 0
3) إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل

مثال : حل المعادلة $x^2 = 7$ و $x^2 = -4$

بما أن $7 > 0$ فإن المعادلة لها حلان هما : $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$

بما أن $-4 < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل

لتبسيط العدد غير الناطق $\sqrt{a}$ ، نتبع الخطوات التالية :

1) نكتب العدد a على شكل جداء مربع تام أي: $a = b^2 \times c$
2) نستعمل خواص الجذور التربيعية المذكورة أعلاه ، لكتابته على شكل $c\sqrt{b}$

مثال : كتابة على الشكل $a\sqrt{b}$ العدد $\sqrt{50}$ حيث :
a و b عددان طبيعيان و b أصغر عدد ممكن

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

لتبسيط مجموعة جذور، نتبع مايلي :

1) نكتب إن أمكن كل جذر على الشكل $a\sqrt{b}$
2) نستخرج $\sqrt{b}$ كعامل مشترك بإستخدام الخاصية التوزيعية

مثال : بسط العبارة التالية $\sqrt{50} + \sqrt{98}$

لدينا : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

ومنه : $\sqrt{50} + \sqrt{98} = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(7+5)$

$= 12\sqrt{2}$

لجعل مقام النسبة $\frac{a}{\sqrt{b}}$ عددا ناطقا

1) نقوم بضرب كلا من البسط و المقام النسبة في $\sqrt{b}$
2) نقوم بعد ذلك بتبسيط الكسر ان أمكن ذلك

مثال : اكتب على شكل كسر مقامه عدد ناطق $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

تذكير بالمكتسبات القبلية

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(a^n)^m = a^{(n\times m)}$
$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$(ab)^n = a^n \times b^n$
$a^0 = 1$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$1^n = 1$	$a^1 = a$

مثال: أكتب الناتج على أبسط شكل :

$A = \sqrt{125} + \sqrt{45} = 8\sqrt{5}$; $\sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$

$\frac{\sqrt{44}}{2} = \sqrt{\frac{44}{4}} = \sqrt{11}$ | $\frac{\sqrt{44}}{2} = \frac{\sqrt{4\times 11}}{2} = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$



3 ملخص : الحساب الحرفي

خواص مستعملة لنشر العبارات الجبرية

$k(a-b)=ka-kb$	$k(a+b)=ka+kb$
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$	
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	

لنشر وتبسيط العبارات الجبرية ، نتبع الخطوات التالية :

1) ننشر العبارة الجبرية بإستخدام الخواص المذكوره أعلاه
2) نقوم بتبسيط العبارة الجبرية إلى أبسط شكل ممكن

مثال : نشر و تبسط العبارات التالية :

$$3(2+5x)=3\times 2+3\times 5x=6+15x$$

$$(x+4)(x+3)=x^2+4x+3x+12$$
$$=x^2+7x+12$$

$$(3x+1)^2=(3x)^2+6x+1$$
$$=9x^2+6x+1$$

$$(2x-3)^2=(2x)^2-(2\times 2x\times 3)+3^2$$
$$=4x^2-12x+9$$

$$\left(\frac{4}{5}-2x\right)\left(\frac{4}{5}+2x\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^2-(2x)^2$$
$$=\frac{16}{25}-4x^2$$

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$=2-2\sqrt{6}+3=5-2\sqrt{6}$$

$$(-2x+0{,}5)^2=(-2x)^2+2\times(-2x)\times 0{,}5+(0{,}5)^2$$
$$=4x^2-2x+0{,}25$$

لتحليل العبارات الجبرية ، نتبع الخطوات التالية :

1) نبحث عن العامل المشترك لكل حدود العبارة الجبرية
2) إن لم يكن العامل المشترك ظاهرا ، نجرب إحدى المتطابقات الشهيرة .

مثال : تحليل العبارات التالية

$$4x+12=4x+4\times 3=4(x+3)$$

$$(x+2)(2x+1)-x(x+2)$$
$$(x+2)(2x+1-x)=(x+2)(x+1)$$

$x^2+16x+64$ من الشكل $a^2+2ab+b^2$

و بالمطابقة نجد : $b^2=64$ و $a^2=x^2$

ومنه : $x^2+16x+64=(x+8)^2$

$$4x^2-28x+49-5(2x-7)$$

بالمطابقة نجد : $b^2=49$ و $a^2=4x^2$

ومنه : $(2x-7)^2-5(2x-7)$

$$(2x-7)(2x-7-5)$$
$$(2x-7)(2x-12)$$

$$x^2-9+(2x+6)$$

لدينا : $x^2-9=(x+3)(x-3)$

و أيضا : $(2x+6)=2(x+3)$

ومنه : $(x+3)(x-3)+2(x+3)$

$$(x+3)(x-3+2)$$
$$(x+3)(x-1)$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

4 ملخص : المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

خواص المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1) كل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x يمكن تحويلها إلى معادلة من الشكل $ax = b$

2) إذا كان $a \neq 0$ حل المعادلة $ax = b$ هو : $x = \frac{b}{a}$

لحل المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1) نحول المعادلة إلى الشكل $ax = b$ بجعل المجاهيل ﴿ التي تشمل x ﴾ على يسار المساواة و الأعداد على يمين المساواة .

2) بعد ذلك نقوم بتبسيط ثم نحل المعادلة لإيجاد قيمة x

مثال : حل المعادلة $5x + 2 = 2x + 3$

نطرح (2) من طرفي المساواة

$$5x = 2x + 1$$

نطرح $(2x)$ من طرفي المساواة

$$5x - 2x = 1$$

$$3x = 1$$

نضرب طرفي المساواة في $\frac{1}{3}$

$$x = \frac{1}{3}$$

لحل المعادلة من الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$:

1) نحل المعادلة الأولى $ax_1 + b = 0$

2) بعدها نحل المعادلة الثانية $cx_2 + d = 0$

3) للمعادلة حلين هما : x_1 و x_2

مثال : حل المعادلة $(2x - 7)(8x - 9) = 0$

نحل المعادلة $2x_1 - 7 = 0$ ، و منه : $x_1 = \frac{7}{2}$

نحل المعادلة $8x_2 - 9 = 0$ ، ومنه : $x_2 = \frac{9}{8}$

ومنه حلول المعادلة هما : $\frac{7}{2}$ و $\frac{9}{8}$

لحل المعادلة تؤول إلى الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$:

1) نقوم بتحليل العبارة إلى جداء عاملين

2) نحل المعادلة الأولى $ax_1 + b = 0$

3) بعدها نحل المعادلة الثانية $cx_2 + d = 0$

4) للمعادلة حلين هما : x_1 و x_2

مثال : حل المعادلة $(1 - 2x)(4x - 3) - 3(4x - 3) = 0$

لدينا : $(4x - 3)(1 - 2x - 3) = (4x - 3)(-2x - 2)$

ومنه نحل المعادلة التالية : $(4x - 3)(-2x - 2) = 0$

إذن : $4x_1 - 3 = 0$ ، نجد أن : $x_1 = \frac{3}{4}$

أو : $-2x_2 - 2 = 0$ ، نجد أن : $x_2 = -1$

و منه حلول المعادلة هما : $\frac{3}{4}$ و -1

لترييض مشكلة و حل معادلة ، نتبع الخطوات التالية

1) نختار المجهول

2) نضع المعادلة المناسبة التي تعبر عن المشكلة

3) نحل المعادلة ثم نتحقق من الحل

4) نجيب عن السؤال

مثال : حل المسألة التالية

عمر شعيب قبل سبع سنوات هو نصف عمره بعد أربع سنوات . حدد عمر شعيب

لدينا : $2(x - 7) = x + 4$

$$2x - 14 = x + 4$$

$$2x - x = 4 + 14$$

$$x = 18$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

5 ملخص في المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

خواص المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1) لا يتغير إتجاه متراجحة ، عند إضافة (أو طرح) نفس العدد من طرفي المتراجحة .
2) لا يتغير اتجاه متراجحة ، عند ضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة بنفس العدد الموجب تماما .
3) يتغير اتجاه متراجحة ، عند ضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة بنفس العدد السالب تماما .

لحل المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1) نحول المتراجحة إلى الشكل $ax \geq b$ بجعل المجاهيل ﴿ التي تشمل x ﴾ على يسار المتباينة و الأعداد على يمين المتباينة .
2) بعد التبسيط ، نقسم طرفي المتراجحة على العدد a مع مراعاة إشارته و اتجاه المتراجحة

مثال : حل المتراجحة $-5x + 2 \geq 2x + 3$

نطرح (2) من طرفي المتباينة ، فنتحصل على :

$$-5x \geq 2x + 1$$

نطرح $(2x)$ من طرفي المتباينة ، فنتحصل على :

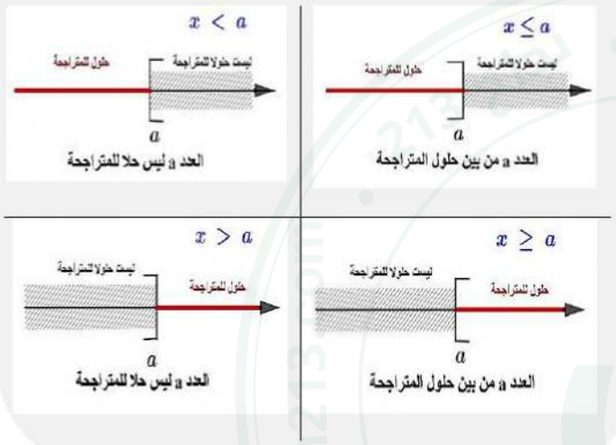
$$-5x - 2x \geq 1$$
$$-7x \geq 1$$

نضرب طرفي المتباينة في $-\frac{1}{7}$ مع تغيير إتجاه المتراجحة ، فنجد :

$$x \leq -\frac{1}{7}$$

لتمثيل حلول متراجحة بيانيا ، نتبع مايلي :

1) نحل المتراجحة كما هو مذكور سابقا .
2) في مستقيم مدرج نلون نصف المستقيم الممثل لمجموعة حلول المتراجحة ، و نشطب نصف المستقيم الآخر .
3) نفصل بين نصفي المستقيمين بمعكوفة] ، فإذا كانت فاصلة النقطة من ضمن حلول المتراجحة توجه المعكوفة لجهة الجزء الملون و إلا توجه لجزء مشطوب .



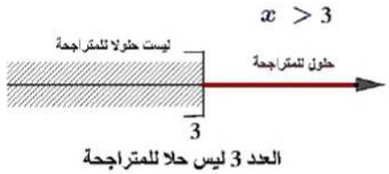
مثال : حل و تمثيل حلول المتراجحة $6x + 5 > 23$

نطرح (5) من طرفي المتباينة ، فنتحصل على :

$$6x > 18$$

نضرب طرفي المتباينة في $\frac{1}{6}$ ، فنجد :

$$x > 3$$



العدد 3 ليس حلا للمتراجحة

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

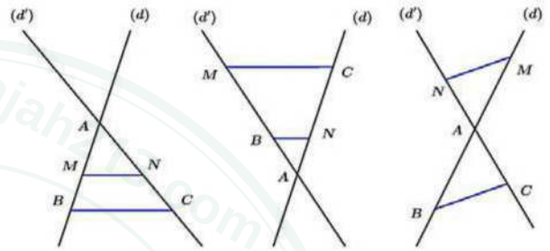
13 ملخص : خاصية طاليس

خاصية طاليس المباشرة

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A . B و M نقطتان من (d) مختلفتان عن A . C و N نقطتان من (d') مختلفتان عن A.

إذا كان (MN) // (BC) فإن :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



خاصية طاليس العكسية

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A .

B و M نقطتان من (d) مختلفتان عن A .

C و N نقطتان من (d') مختلفتان عن A .

إذا كان : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ و كانت النقاط M ، B ، A في استقامة واحدة و نفس الترتيب مع النقط N ، C ، A

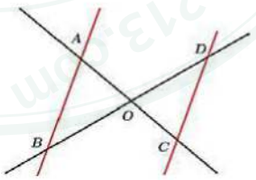
فإن : $(MN) // (BC)$

مثال 01 : إليك الشكل المقابل حيث :

$(CD) // (AB)$

$OA = 4\ cm\ ;\ OD = 8{,}4\ cm$

$OC = 6\ cm\ ;\ AB = 3\ cm$



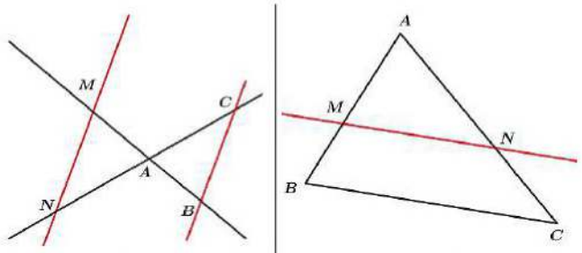
أحسب الطولين : OB و CD

من المعطيات لدينا (DB) و (AC) مستقيمان متقاطعان في O و المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان

إذن حسب خاصية طاليس نكتب مايلي : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$

أي بعد التعويض نجد : $OB = 5{,}6\ cm$ و $CD = 4{,}5\ cm$

مثال 02 : اثبت أن المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان



$AM = 5{,}4\ cm$
$AB = 9\ cm$
$AN = 7{,}5\ cm$
$AC = 12{,}5\ cm$

$AM = 11{,}9\ cm$
$AB = 35\ cm$
$AN = 18{,}2\ cm$
$AC = 52\ cm$

في الشكل الأول

$$\frac{AM}{AB} = \frac{5{,}4}{9} = 0{,}6 \quad \text{و} \quad \frac{AN}{AC} = \frac{7{,}5}{12{,}5} = 0{,}6$$

حسب خاصية طاليس العكسية ، المستقيمين متوازين

في الشكل الثاني

$$\frac{AN}{AC} = \frac{18{,}2}{52} = 0{,}35 \quad \text{و} \quad \frac{AM}{AB} = \frac{11{,}9}{35} = 0{,}34$$

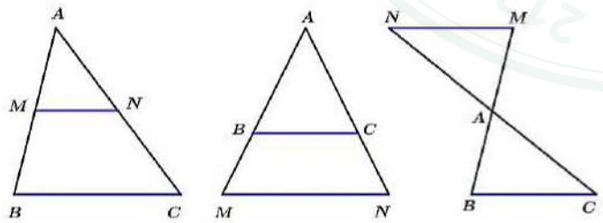
حسب خاصية طاليس العكسية ، المستقيمين غير متوازيين

خاصية طاليس على المثلث

ليكن ABC مثلث ، M نقطة من الحامل (AB)

N نقطة من الحامل (AC) ، إذا كان $(MN) // (BC)$ فإن :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



خاصية العكسية لطاليس على المثلث

ABC مثلث إذا كانت M نقطة من [AB]

و كانت N نقطة من [AC] و $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

فإن : $(MN) // (BC)$

14 ملخص : النسب المثلثية في مثلث قائم

في مثلث قائم

1) Cos زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية على طول الوتر .
2) Sin زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على طول الوتر .
3) Tan زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على طول الضلع المجاور للزاوية .

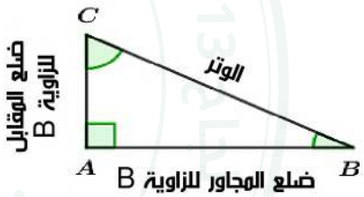
ملاحظات

Cos و Sin زاوية محصورة بين 0 و 1

Tan زاوية حادة و هو عدد موجب

مثال : من أجل المثلث ABC القائم في A

$$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} \; ; \; \sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} \; ; \; \tan\hat{B} = \frac{AC}{AB}$$



علاقات حساب في المثلثات القائمة

في مثلث قائم ، x تمثل قيس الزاوية الحادة

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{و} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

مثال : علما أن : $\cos x = \frac{3}{5}$ ، أحسب $\sin x$ و $\tan x$

بإستعمال العلاقة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

لدينا : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

أي : $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$ و منه : $\sin^2 x = \frac{16}{25}$

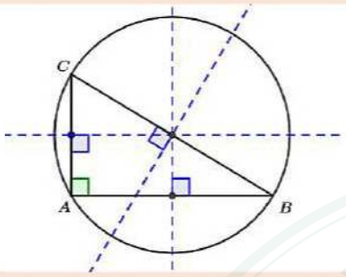
أي : $\sin x = \frac{4}{5}$

بإستعمال العلاقة : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

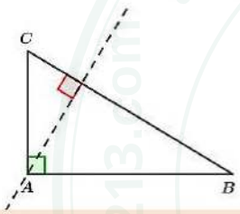
ومنه : $\tan x = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$

تذكير بالمكتسبات القبلية

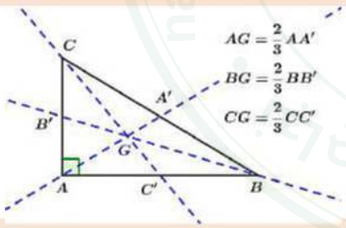
1) مجموع قيسي الزاويتين الحادتين في مثلث القائم يساوي $90°$
2) محاور مثلث القائم هي محاور أضلاعه حيث تتقاطع في منتصف الوتر الذي يمثل مركز الدائرة المحيطة .



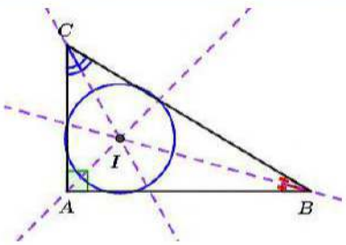
3) الإرتفاع في المثلث القائم هو المستقيم الذي يشمل رأس الزاوية القائمة و يعامد الوتر .



4) المتوسط في المثلث هو المستقيم الذي يشمل رأس و منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس .



5) المنصف الداخلي لمثلث هو منصف احدى زواياه الداخلية . نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا مثلث هي مركز الدائرة الداخلية له .

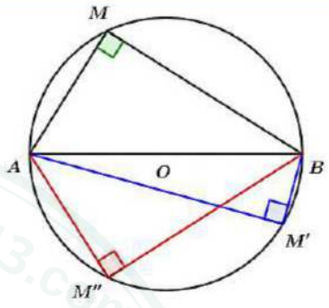


فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

15 ملخص : النسب المثلثية في مثلث قائم

6) المثلث القائم و الدائرة

- إذا كانت M نقطة و تنتمي للدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن المثلث AMB قائم في M
- إذا كان المثلث AMB قائم ، فإن M نقطة تنتمي للدائرة التي قطرها $[AB]$ و مركزها منتصف [AB]



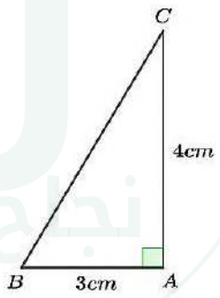
7) خاصية فيثاغورس : إذا كان المثلث ABC قائم في A فإن :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

مثال : ABC مثلث قائم في A ، حيث :

$AC = 4\ cm$ و $AB = 3\ cm$

أحسب BC طول الوتر [BC]



لدينا المثلث ABC قائم في A و حسب خاصية فيثاغورس نكتب المساواة التالية :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 3^2 + 4^2$$
$$BC^2 = 25 \text{ و منه } BC = 5\ cm$$

8) خاصية العكسية لفيثاغورس : إذا كان ABC مثلث حيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن المثلث ABC قائم في A

مثال : ABC مثلث ، حيث :

$AB = 5\ cm$ و $AC = 4\ cm$ و $BC = 7\ cm$

تحقق من أن المثلث ABC مثلث قائم

بما أن BC اكبر طول أذا نكتب مايلي : $BC^2 = AC^2 + AB^2$

و منه بعد تحقق من صحة المساواة نستنتج أن المثلث ABC ليس بمثلث قائم

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً