najah213.com · نجاح 213

# BAC 2021

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — الأستاذة: قمري سميرة

الشعبة: علوم تجريبية — دورة ماي 2021

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا

## التمرين الأول :

صندوق به 9 كرات لا نفرق بينها عند اللمس، منها أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2 . وثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 2، 2 ، 3 وكرتان خضراوان تحملان الرقمين 1 ، 3 . نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع. نسمي الحادثين: A: الكرة الأولى تحمل الرقم 1 ، B : الكرات الثلاث من نفس اللون.

1. بين أن $P(A)=\frac{4}{9}$ وأن $P(B)=\frac{5}{84}$
2. احسب $P(A\cap B)$ ثم استنتج $P(A\cup B)$

لاعب يدفع 5 دينارا ثم يسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق السابق دفعة واحدة، إذا كانت الكرات تحمل نفس الرقم يحصل على 10 دينار. وإذا كانت كرتان فقط تحملان نفس الرقم يحصل على 5 دينار وإذا كانت الكرات تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى لا يحصل على شيئ (يخسر مادفعه). نسمي X: المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب **قيمة الربح الصافي**

3. بين أن $P(X=0)=\frac{55}{84}$
4. عين قيم المتغير العشوائي $X$
5. اكتب قانون احتمال المتغير العشوائي $X$
6. احسب $E(X)$
7. يعيد شخص هذه اللعبة 2000 مرة بصفة مستقلة. ما هو مجموع الربح المتوقع؟

## التمرين الثاني:

$(D_1)$ و $(D_2)$ مستقيمان معرفان بمعادلتيهما $(D_1): y=\ln(2)x+\ln\left(\frac{2}{e}\right)$ و $(D_2): y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. احسب فاصلة نقطة تقاطع $(D_1)$ و $(D_2)$ ثم مثل $(D_1)$ و $(D_2)$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

المتتالية $(u_n)$ معرفة بحدها الأول $u_0$ حيث $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\ln(2)u_n+\ln\left(\frac{2}{e}\right)$ .

2. مثل على محور الفواصل الحدود $u_0$، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ (دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء)
3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}<u_n<-1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

$(v_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=3u_n+\alpha$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي.

4. عين قيمة $\alpha$ بحيث تكون المتتالية $(v_n)$ هندسية .

نضع $\alpha=3$

6. أكتب $v_n$ بدلالة $n$ ثم عبر عن $u_n$ بدلالة $n$ .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

7. احسب نهاية المتتالية $(v_n)$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$

نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$، $w_n = u_0 + \frac{u_1}{\ln 2} + \frac{u_2}{(\ln 2)^2} + ... + \frac{u_n}{(\ln 2)^n}$ .

8. هل المتتالية $(w_n)$ متقاربة ؟

**التمرين الثالث:**

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^{2x} - e^x - x$، $(C_f)$ منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ .

2) بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى $(Cf)$ عند $-\infty$

3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(Cf)$ مع المستقيم $(D)$.

4) أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

5) حدد إشارة الدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

6) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) يطلب كتابة معادلة له

7) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب حساب احداثييها.

8) ارسم $(C_f)$ والمماس (T) والمستقيم (D)

9) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ : $e^x = 1 + me^{-x}$

$g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

10) اعتمادا على دراستك لاتجاه تغير الدالة $f$

أ) استنتج –دون حساب– نهايات الدالة $g$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة $g$

11) $F$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = e^x\left(\frac{1}{2}e^x - 1\right) - \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

أ) بين أن الدالة $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة $F$ على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

الأستاذة قمري سميرة

**التمرين الرابع:**

المستوي لمركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. النقط $A$، $B$ و $C$ لواحقها على الترتيب: $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ حيث: $z_A = -3 + 2i\sqrt{3}$ ، $z_B = -i\sqrt{3}$ ، $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ .

1. بيّن أن $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثمّ عيّن طبيعة المثلث ABC

2. احسب لاحقة النقطة $G$ مركز ثقل المثلث ABC

3. احسب لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $G$ بالدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$

4. بين أن $\left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right)^{2021} = -1$

5. استنتج أن النقطة $A$ نظيرة النقطة $B$ بالنسبة إلى $D$.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## التمرين الأول :

R1 ; R1 ; R1 ; R2 ; B2 ; B3 ; V1 ; V3

1. إثبات أن: $P(A)=\frac{4}{9}$ وأن $P(B)=\frac{5}{84}$

$$P(A)=\frac{A_4^1\times A_5^2}{A_9^3}=\frac{4}{9} \quad و \quad P(B)=\frac{A_5^3+A_4^3}{A_9^3}=\frac{5}{84}$$

2. حساب $P(A\cap B)$ ثم استنتاج $P(A\cup B)$ :

$$P(A\cap B)=\frac{A_5^3}{A_9^3}=\frac{6}{504}=\frac{1}{84}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{31}{63}$$

3. إثبات أن $P(X=0)=\frac{55}{84}$

$$P(X=0)=\frac{C_4^2C_5^1+C_3^2C_6^1+C_3^2C_5^1}{C_9^3}=\frac{55}{84}$$

4. قيم المتغير العشوائي $X$ : $X=\{-5,0,5\}$

5. قانون احتمال المتغير العشوائي $X$

| $x_i$ | -5 | 0 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{24}{84}$ | $\frac{55}{84}$ | $\frac{5}{84}$ |

6. حساب $E(X)$: $E(X)=\sum p_ix_i=\frac{-95}{84}$

7. مجموع الربح المتوقع بعد إعادة هذه اللعبة 2000 مرة:

$2000E(X)=-2262$

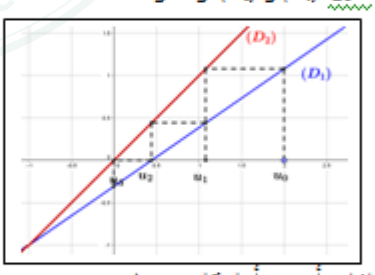
من المتوقع خسارة ما يقارب 2262 دينارا

## التمرين الثاني:

1. فاصلة نقطة تقاطع $(D_1)$ و $(D_2)$ : بحل المعادلة

$x=3x-4$ نجد: $x=2$

2. تمثيل $(D_1)$ و $(D_2)$ والحدود




3. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $-1<u_{n+1}<u_n$

بالتراجع:

أ- لدينا $u_0=2$ و $u_1=-\ln(8)-1$

$-1<u_1<u_0$ فالخاصية محققة من أجل 0

ب- نبرهن صحة الاستلزام: $-1<u_{n+1}<u_n$ يستلزم $-1<u_{n+2}<u_{n+1}$

$-1<u_{n+1}<u_n$ يستلزم $-\ln(2)<\ln(2)u_{n+1}<\ln(2)u_n$

يستلزم $-\ln(2)+\ln\left(\frac{2}{e}\right)<\ln(2)u_{n+1}+\ln\left(\frac{2}{e}\right)<\ln(2)u_n+\ln\left(\frac{2}{e}\right)$

يستلزم $-1<u_{n+2}<u_{n+1}$

استنتاج اتجاه التغير: المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما

4. تعيين قيمة $\alpha$ بحيث تكون المتتالية $(v_n)$ هندسية .

$v_{n+1}=3u_{n+1}+\alpha$ يكافئ $v_{n+1}=3\left(\ln(2)u_n+\ln\left(\frac{2}{e}\right)\right)+\alpha$

يكافئ $v_{n+1}=3\ln(2)u_n+3\ln(2)-3+\alpha$

يكافئ $v_{n+1}=\ln(2)\left(3u_n+3-\frac{3-\alpha}{\ln(2)}\right)$

يكفي أن يكون: $3-\frac{3-\alpha}{\ln(2)}=\alpha$ أي $\alpha=3$

عبارة الحد العام: $v_n=9(\ln 2)^n$

$u_n=\frac{1}{3}v_n-1=\frac{1}{3}(9(\ln 2)^n)-1=3(\ln 2)^n-1$

نهاية المتتالية $(v_n)$ و نهاية المتتالية $(u_n)$

المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها موجب أصغر من 1 فنهايتها 0

$\lim u_n=\lim(\frac{1}{3}v_n-1)=-1$

نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

$w_n=u_0+\frac{u_1}{\ln 2}+\frac{u_2}{(\ln 2)^2}+...+\frac{u_n}{(\ln 2)^n}$ .

5. تقارب المتتالية $(w_n)$

$w_n=u_0+\frac{u_1}{\ln 2}+\frac{u_2}{(\ln 2)^2}+...+\frac{u_n}{(\ln 2)^n}$

$w_n=\frac{1}{3}v_0-1+\frac{\frac{1}{3}v_1-1}{\ln 2}+\frac{\frac{1}{3}v_2-1}{(\ln 2)^2}+...+\frac{\frac{1}{3}v_n-1}{(\ln 2)^n}$

$w_n=\frac{1}{3}(v_0+v_1+...v_n)-1-\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}+...-\frac{1}{(\ln 2)^n}$

المتتالية $(w_n)$ مجموع متتاليتين متقاربتين فهي متقاربة

## التمرين الثالث :

1. حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{2x}-e^x-x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x(e^x-1)-x=+\infty$$

2. إثبات أن المستقيم (D) مقارب مائل للمنحنى $(Cf)$ عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x))=\lim_{x\to-\infty}e^{2x}-e^x=0$$

3. الوضع النسبي للمنحنى $(Cf)$ مع المستقيم $(D)$.

نبرير إشارة الفرق $e^{2x}-e^x$ حيث $e^{2x}-e^x=e^x(e^x-1)$

$x\in]-\infty,0[$ المنحنى $(Cf)$ تحت المستقيم $(D)$.

المنحنى $(Cf)$ يقطع المستقيم $(D)$ في النقطة التي فاصلتها 0

$x\in]0,+\infty[$ المنحنى $(Cf)$ فوق المستقيم $(D)$.

الأستاذة فهيري سميرة

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

4. اتجاه تغير الدالة $f$ : $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=2e^{2x}-e^x-1=2\left(e^x+\frac{1}{2}\right)\left(e^x-1\right)$$

الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$

و متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

5. إشارة الدالة $f$ على $\mathbb{R}$: $f$ موجبة تماما

المماس (T): (T) يوازي المستقيم (D) يعني $f'(x)=-1$

$2e^{2x}-e^x-1=-1$ يكافئ $x=-\ln(2)$

6. معادلة المماس: $y=-x-\frac{1}{4}$

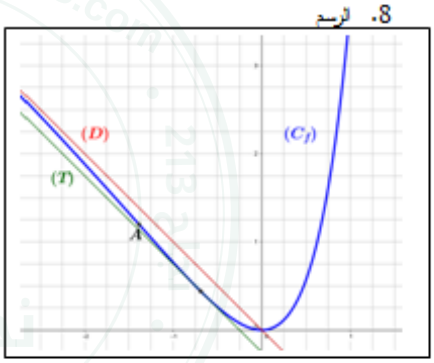
7. نقطة انعطاف المنحنى $(C_f)$: $f$ تقبل الاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=4e^{2x}-e^x=e^x\left(4e^x-1\right)$$

الدالة $f'$ تنعدم عند $-\ln 4$ وتغير إشارتها فالمنحنى $(C_f)$

يقبل نقطة انعطاف احداثياها: $A(-\ln 4, e^{-\frac{1}{4}}-e^{-\frac{1}{4}}+\ln 4)$

8. الرسم




9. المناقشة البيانية:

$e^{2x}=e^x+m$ تكافئ: $e^x=1+me^{-x}$

تكافئ: $e^{2x}-e^x-x=-x+m$

المعادلة لا تقبل حلا $m\in\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[$

المعادلة تقبل حلا وحيدا $m=-\frac{1}{4}$

المعادلة تقبل حلين مختلفين $m\in\left]-\frac{1}{4},0\right[$

المعادلة تقبل حلا وحيدا $m\in[0,+\infty[$

10. نهايات الدالة $g$ :

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

جدول تغيرات الدالة $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $0$ | $+\infty$ | $\|\|$ | $-\infty$ | $0$ |

12. إثبات أن $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ :

$F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$

$$F'(x)=e^{2x}-e^x-x=f(x)$$

اتجاه تغير الدالة $F$

$f$ موجبة تماما إذن الدالة $F$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

**التمرين الرابع:**

1. إثبات أن $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{-3+3i\sqrt{3}}{3+3i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{-4}$$

$$=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

طبيعة المثلث ABC: $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

معناه $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pi}{3}$

أي $AB=BC$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{3}$ فالمثلث ABC متقايس الأضلاع

2. لاحقة النقطة $G$ مركز ثقل المثلث ABC

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=i\sqrt{3}$$

3. لاحقة النقطة $D$ : $\frac{z_D-z_G}{z_C-z_G}=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_D=z_G e^{i\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(i\sqrt{3}\right)=\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. إثبات أن: $\left(\frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}\right)^{2021}=-1$

$$\left(\frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}\right)^{2021}=\left(\frac{-3+2i\sqrt{3}-\left(\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-i\sqrt{3}-\left(\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)^{2021}$$

$$=\left(\frac{-3+3i\sqrt{3}}{3-3i\sqrt{3}}\right)^{2021}=(-1)^{2021}=-1$$

استنتاج: $\frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}=-1$ يعني $\overline{DB}=-\overline{DA}$

فإن النقطة $A$ نظيرة النقطة $B$ بالنسبة إلى $D$

الأستاذة قيري سميرة

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com