مجاميع و جداءات المتتاليات

إعداد: عبلة محمد أمين

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

(u_n) متتالية حسابية حيث $u_n = 2+3n$ (الأساس $r=3$ و الحد الأول $u_0=2$)

(v_n) متتالية هندسية حيث $v_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (الأساس $q=\frac{1}{3}$ و الحد الأول $v_0=2$)

و لتكن المتتالية (w_n) حيث $v_n = w_n + a$ (مع عدد a حقيقي غير معدوم)

و نعتبر المتتاليين العدديتين $\alpha_n = \frac{1}{n(n+1)}$ و $\beta_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ (مع $n>0$)

أحسب المجاميع و الجداءات الثالية :

1- $S_1 = u_0 + u_1 + ... + u_n$

2- $S_2 = v_0 + v_1 + ... + v_n$

3- $S_3 = b^{u_0} + b^{u_1} + ... + b^{u_n}$ (مع b عدد حقيقي غير معدوم مختلف عن 1)

4- $S_4 = v_0^{\alpha} + v_1^{\alpha} + ... + v_n^{\alpha}$ (مع α عدد حقيقي غير معدوم مختلف عن 1)

5- $S_5 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + ... + \frac{1}{v_n}$

6- $S_6 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + ... + \sqrt{v_n}$

7- $S_7 = w_0 + w_1 + ... + w_n$

8- $S_8 = v_0 + v_1 + ... + v_{2n}$

9- $S_9 = v_0 + v_2 + ... + v_{2n}$

10- $S_{10} = v_1 + v_3 + ... + v_{2n+1}$

11- $P_1 = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$

12- $S_{11} = \ln v_0 + \ln v_1 + ... + \ln v_n$ (بطريقتين)

13- $S_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ (بعد إثبات أن $\alpha_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$)

خاصة بشعبة الرياضيات:

14- $P_2 = \beta_1 \times \beta_2 \times .... \times \beta_n$

15- $S_{13} = \ln \beta_1 + \ln \beta_2 + ... + \ln \beta_n$ (بطريقتين)

16- $S_{14} = 1v_1 + 2v_2 + ... + nv_n$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

تذكـــير:

قانون مجموع متتالية حسابية:

إذا كانت $u_n = u_0 + nr$ فإن:

$$S_n = u_p + \ldots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n - p + 1)}{2}$$

حيث:

u_p الحد الأول في المجموع

u_n الحد الأخير في المجموع

p دليل الحد الأول

n دليل الحد الأخير

$n - p + 1$ عدد الحدود

قانون مجموع المتتالية الهندسية:

إذا كانت $v_n = v_0 \times q^n$

فإن $s_n = v_p + \ldots + v_n = v_p \left(\frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q} \right)$

حيث:

v_p الحد الأول في المجموع

v_n الحد الأخير في المجموع

p دليل الحد الأول

n دليل الحد الأخير

$n - p + 1$ عدد الحدود

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

مجاميع و جداءات المتتاليات

عبلة محمد أمين

1- $S_1 = u_0 + u_1 + ... + u_n$

المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = 3$ و حدها الأول $u_0 = 2$

إذا $S_1 = \dfrac{(u_0 + u_n)(n-0+1)}{2} = \dfrac{(4+3n)(n+1)}{2}$

2- $S_2 = v_0 + v_1 + ... + v_n$

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 2$

إذا $S_2 = v_0\left(\dfrac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right) = 2\left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right) = 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

3- $S_3 = b^{u_0} + b^{u_1} + ... + b^{u_n}$

هنا نلاحظ ان المجموع هو لمتتالية مكتوبة على الشكل b^{u_n}

إذا $b^{u_n} = b^{u_0+nr} = b^{2+3n} = b^2 \times b^{3n} = b^2 \times \left(b^3\right)^n$

بعد الإثبات نجد أن $\left(b^{u_n}\right)$ متتالية هندسية

أساسها $q' = b^r = b^3$ و حدها الأول $b^{u_0} = b^2$

إذا نطبق قانون مجموع متتالية هندسية فنجد

$S_3 = b^{u_0}\left(\dfrac{1-\left(b^r\right)^{n+1}}{1-b^r}\right) = b^2\left(\dfrac{1-\left(b^3\right)^{n+1}}{1-b^3}\right)$

4- $S_4 = v_0^\alpha + v_1^\alpha + ... + v_n^\alpha$

هنا نلاحظ ان المجموع هو لمتتالية مكتوبة على الشكل v_n^α

$v_n^\alpha = \left(v_0 \times q^n\right)^\alpha = v_0^\alpha \cdot q^{n\cdot\alpha} = v_0^\alpha \cdot \left(q^\alpha\right)^n$

بعد الإثبات نجد أن $\left(v_n^\alpha\right)$ متتالية هندسية

أساسها $q^\alpha = \left(\dfrac{1}{3}\right)^\alpha$ و حدها الأول $v_0^\alpha = 2^\alpha$

إذا نطبق قانون مجموع متتالية هندسية فنجد

$S_4 = v_0^\alpha\left(\dfrac{1-\left(q^\alpha\right)^{n-0+1}}{1-q^\alpha}\right) = 2^\alpha\left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha(n+1)}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha}\right)$

5- $S_5 = \dfrac{1}{v_0} + \dfrac{1}{v_1} + ... + \dfrac{1}{v_n}$

لدينا $\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \dfrac{1}{2} \times 3^n$

إذا بعد البرهان نجد أن $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{q} = 3$ و حدها الأول $\dfrac{1}{v_0} = \dfrac{1}{2}$

إذا نطبق قانون مجموع متتالية هندسية فنجد

$S_5 = \dfrac{1}{v_0}\left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^{n-0+1}}{1-\left(\frac{1}{q}\right)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-3^{n+1}}{-2}\right) = \dfrac{1}{4}\left(3^{n+1}-1\right)$

6- $S_6 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + ... + \sqrt{v_n}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

هنا نلاحظ ان المجموع هو لمتتالية مكتوبة على الشكل $\sqrt{v_n}=(v_n)^{\frac{1}{2}}$

و نطبق نفس الطريقة في المثال 4

7- $S_7=w_0+w_1+....+w_n$

المتتالية (w_n) لا حسابية و لا هندسية و لكنها مكتوبة بدلالة المتتالية الهندسية (v_n)

لدينا $w_n=v_n-a$

نكتب كل حدود لمتتالية (w_n) بدلالة حدود المتتالية (v_n) فيصبح لدينا:

$$s_7=v_0-a+v_1-a+....+v_n-a$$

نجمع حدود المتتالية (v_n) لوحدهم و الأعداد $-a$ لوحدهم أيضا

إذا $S_7=\underbrace{v_0+v_1+...+v_n}_{S_2}\underbrace{-a-a-a-....-a}_{n\ (\ 0+1)}$

هناك $n+1$ حد من الأعداد $-a$ لأن كل حد من حدود المتتالية (v_n) يرافقه عدد $-a$

إذا $S_7=S_2-a(n+1)$

8- $S_8=v_0+v_1+....+v_{2n}$

S_8 عبارة عن مجموع متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0

و لكن الإختلاف مع S_2 يكمن في عدد الحدود فقط

إذا $S_8=v_0\left(\frac{1-(9)^{2n-0+1}}{1-9}\right)=2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{\frac{2}{3}}\right)$

$$S_8=3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\right)$$

9- $S_9=v_0+v_2+....+v_{2n}$

نلاحظ أن $\frac{v_{2n}}{v_{2n-2}}=....=\frac{v_2}{v_0}=q^2$ (قسمة كل حد على الحد الذي يسبقه)

إذا المجموع S_9 هو مجموع متتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_0

نسميها $x_n=v_0\cdot(q^2)^n$

إذا $S_9=x_0+x_1+....+x_n=v_0\left(\frac{1-(q^2)^{n-0+1}}{1-q^2}\right)$

10- $S_{10}=v_1+v_3+....+v_{2n+1}$

نكتب كل الحدود بدلالة v_1 و q بإستخدام عبارة الحد العام $v_n=v_1\cdot q^{n-1}$

فيصبح لدينا

$$S_{10}=v_1+v_1q^2+v_1q^4+....+v_1q^{2n}$$

ثم نلاحظ أن $\frac{v_1q^{2n}}{v_1q^{2n-2}}=....=\frac{v_1q^2}{v_1}=q^2$

إذا يصبح المجموع عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_1

نسميها $y_n=v_1(q^2)^n$

و منه $S_{10}=y_0+y_1+....+y_n=v_1\left(\frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-(q^2)}\right)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

11- $P_1 = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$

نكتب كل حدود المتتالية (v_n) بدلالة v_0 و q أي بإستخدام عبارة الحد العام لمتتالية هندسية

$$v_n = v_0 q^n$$

إذا $P_1 = v_0 \times v_0 q \times v_0 q^2 \times .... \times v_0 q^n$

$$= \underbrace{v_0 \times v_0 \times .... \times v_0}_{n\ (+0+1)} \times q^1 \times q^2 \times .... \times q^n$$

$$P_1 = v_0^{n+1} \times q^{1+2+....+n}$$

نلاحظ أن $1+2+3+....+n$ هو مجموع لمتتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول 1 (لاحظ أن المجموع بدأ من 1و الفرق بين حد و الحد الذي يليه هو 1)

إذا بعد تطبيق قانون مجموع متتالية حسابية نجد

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

و منه $P_1 = v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

12- $S_{11} = \ln v_0 + \ln v_1 + ... + \ln v_n$

طريقة 1: بتطبيق خواص الدالة اللوغاريتمية

نكتب كل حدود المتتالية (v_n) بدلالة v_0 و q أي بإستخدام عبارة الحد العام لمتتالية هندسية

$v_n = v_0 q^n$ فنجد:

$$S_{11} = \ln v_0 + \ln v_0 \cdot q + \ln v_0 \cdot q^2 + ... + \ln v_0 \cdot q^n$$

نطبق خاصية الدالة اللوغاريتمية

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$$

يصبح لدينا

$$S_{11} = \ln v_0 + \ln v_0 + \ln q + \ln v_0 + \ln q^2 + ... + \ln v_0 + \ln q^n$$

بتطبيق خاصية الدالة اللوغاريتمية

$\ln a^n = n \ln a$ و بجمع الحدود $\ln v_0$ لوحدهم

و الحدود من الشكل $\ln q^n$ لوحدهم نجد

$$S_{11} = \underbrace{\ln v_0 + \ln v_0 + ... + \ln v_0}_{(n-0+1)\ \text{حد}} + \ln q + 2\ln q + ... + n \ln q$$

$$S_{11} = (n+1)\ln v_0 + (1+2+....+n)\ln q$$

$$= (n+1)\ln v_0 + \frac{n(n+1)}{2}\ln q$$

إذا $S_{11} = 2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}\ln\frac{1}{3}$

طريقة 2: (شرط أن نكون قد وجدنا جداء المتتالة الهندسية)

نستخدم العلاقة $\ln a + \ln b = \ln a \cdot b$

نجد $S_{11} = \ln(v_0 \times v_1 \times .... \times v_n) = \ln P_1$

إذا $S_{11} = \ln\left(v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \ln v_0^{n+1} + \ln q^{\frac{n(n+2)}{2}}$

$$= (n+1)\ln v_0 + \frac{n(n+2)}{2}\ln q$$

13- $S_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$

بعدما أثبتنا أن $\alpha_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ يصبح المجموع

$$S_{12} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

لاحظ أن كل حد له علاقة مكتوب على شكل مجموع كسرين الكسر الأول موجود عكسه في حد الذي يسبقه أما الكسر الثاني عكسه

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

موجود في الحد الذي يليه فتحذ كل الكسور إلا أول كسر و آخر كسر

مثال للتوضيح:

$u_{n-5}=\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-4}$ (هو الحد الذي يسبق الحد u_{n-4})

$u_{n-4}=\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-3}$ (الكسر $\frac{1}{n-4}$ عكسه موجود في u_{n-5} و الكسر $\frac{1}{n-3}$ عكسه موجود في u_{n-3})

$u_{n-3}=\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}$ (هو الحد الذي يلي الحد u_{n-4})

فيصبح لدينا $S_{12}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

المجاميع الخاصة بشعبة الرياضيات:

14- $P_2=\beta_1\times\beta_2\times....\times\beta_n$

إذا $P_2=\frac{1(1+2)}{(1+1)^2}\times\frac{2(2+2)}{(2+1)^2}\times....\times\frac{(n-1)(n-1+2)}{(n-1+1)^2}\times\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

لاحظ أن كل حد(ما عدا الحد الأول و الأخير) مكتوب على شكل كسر حيث أن في البسط جداء دليله (الذي يحذف مع مقام الحد الذي يسبقه) ضرب دليله $+2$ (الذي يحذف مع مقام الحد الذي بعده) و مقامه هو مربع دليله $+1$ (الذي يحدف مع بسط الحد الذي قبله و بسط الحد الذي بعده)

إذا بعد التبسيط نجد

$P_2=\frac{1}{(1+1)}\times\frac{n+2}{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}$

15- $S_{13}=\ln\beta_1+\ln\beta_2+....+\ln\beta_n$

طريقة 1: بتطبيق خواص الدالة اللوغاريتمية

لدينا $\ln a\cdot b=\ln a+\ln b$, $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

$\ln a^n=n\ln a$

$S_{13}=\ln\left(\frac{1\times(1+2)}{(1+1)^2}\right)+\ln\left(\frac{2\times(2+2)}{(2+1)^2}\right)+....+\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$

تصبح

$S_{13}=\ln1+\ln(1+2)-2\ln(1+1)+\ln2+\ln(2+2)$

$-2\ln(2+1)+...2+\ln n+\ln(n+2)-2\ln(n+1)$

بعد التبسيط نجد

$S_{13}=\ln1-\ln2+\ln(n+1)-\ln(n+2)$

طريقة 2: يشرط علينا حساب الجداء

نطبق الخاصية $\ln a+\ln b=\ln ab$ نجد

$S_{13}=\ln(\beta_1\times\beta_2\times....\times\beta_n)=\ln P_2$

إذا $S_{13}=\ln\left(\frac{n+1}{2(n+2)}\right)=\ln(n+1)-\ln2-\ln(n+2)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

16- $S_{14}=1v_1+2v_2+....+nv_n$

$S_{14}=v_1+v_2+v_2+....+\underbrace{v_n+v_n+....+v_n}_{n\ \text{حد}}$

$$S_{13}=\begin{pmatrix} v_1+v_2+v_3+....+v_n+\\ v_2+v_3+....+v_n+\\ v_3+....+v_n+\\ .\\ .\\ .\\ v_{n-1}+v_n+\\ v_n \end{pmatrix}$$

إستخدمت هذا النوع من الكتابة لإظهار الحسابات فقط فالمجموع بين قوسين و كل مرة أعود إلى السطر فقط

$$S_{13}=\begin{pmatrix} v_1+v_1q+v_1q^2+....+v_1q^{n-1}+\\ v_1q+v_1q^2+....+v_1q^{n-1}+\\ v_1q^2+....+v_1q^{n-1}+\\ .\\ .\\ .\\ v_1q^{n-2}+v_1q^{n-1}+\\ v_1q^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$S_{13}=\begin{pmatrix} v_1\left(1+q+q^2+....+q^{n-1}\right)+\\ v_1q\left(1+q+....+q^{n-2}\right)+\\ v_1q^2\left(1+....+q^{n-3}\right)+\\ .\\ .\\ .\\ v_1q^{n-2}\left(1+q\right)+\\ v_1q^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$S_{13}=\frac{v_1}{1-q}\left(1-q^n+q-q^n+q^2-q^n+....+q^{n-1}-q^n\right)$$

(نشرنا q^m على الكسر و إستخرجنا عامل $\frac{1}{1-q}$ مشترك)

$$S_{13}=\frac{v_1}{1-q}\left(1+q+q^2+.....+q^{n-1}\underbrace{-q^n-q^n-....-q^n}_{n\ (\text{عدد الحدود}-1+1)}\right)$$

إذا $S_{13}=\frac{v_1}{1-q}\left(\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)-nq^n\right)$

لدينا $1+q+q^2+....+q^m$ مجموع متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول 1 إذا

$$S_{13}=v_1\left(\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)+q\left(\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\right)+q^2\left(\frac{1-q^{n-2}}{1-q}\right)+....+q^{n-2}\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)+q^{n-1}\left(\frac{1-q^1}{1-q}\right)\right)$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com