najah213.com · نجاح 213

## تمرين شامل : ( حول حركة كوكب و قمر اصطناعي )

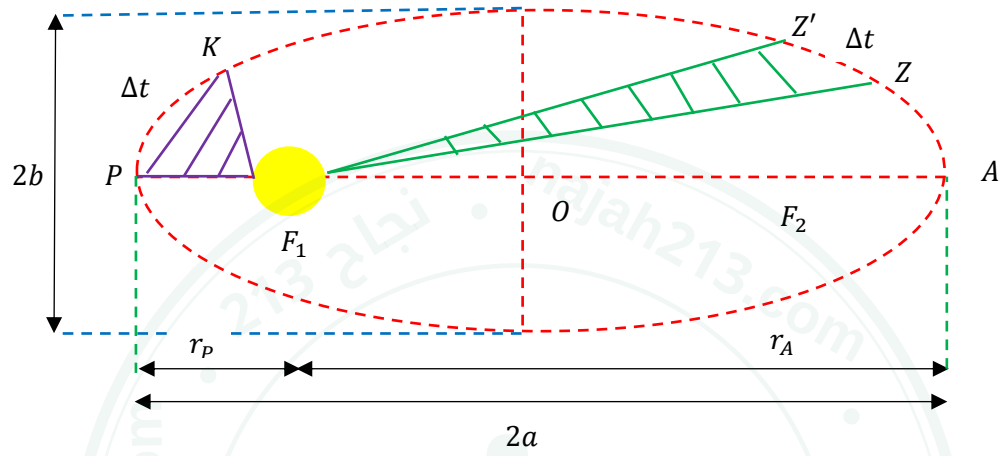
يهدف هذا التمرين إلى دراسة :

- ✓ حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار اهليليجي
- ✓ حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار دائري
- ✓ حركة قمر اصطناعي حول الأرض ضمن مسار دائري

$I-$ تدور الأرض حول الشمس بحيث تأخذ المسافة بين مركز عطالتها وبين مركز الشمس القيمتين الموافقتين لأدنى بعد وأقصاه كما يلي

$r_P = 147.1 \times 10^6\ km$ و $r_A = 152.1 \times 10^6\ km$ ( الشكل 01 )

( الشكل **01** )




1) ماهو المرجع المناسب الذي تنسب إليه حركة الأرض ؟ عرفه ؟ وماهي الفرضية الواجب اعتمادها أثناء دراسته ؟

2) أذكر نص القانون الأول لكبلر ؟

3) ما طبيعة مسار كوكب الأرض ؟ ماهو موقع الشمس في هذا المسار ؟

4) ماذا يمثل الطول $2a$ والطول $2b$ ؟ أحسب طول نصف المحور الكبير لهذا المسار

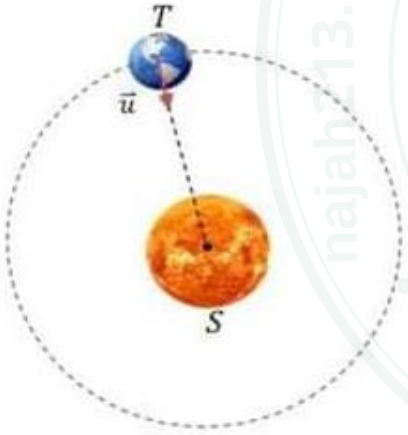
5) في أي نقطة تكون سرعة الأرض أصغرية وفي أي نقطة تكون سرعته أعظمية ؟

6) مثل شعاعي سرعتيهما بشكل كيفي على الرسم .

ينتقل كوكب الأرض أثناء حركته على مداره من النقطة $Z$ إلى $Z'$ ثم من النقطة $K$ إلى النقطة خلال نفس المدة الزمنية $\Delta t$ .

7) حسب قانون كيبلر الثاني ماهي العلاقة بين المساحتين الممسوحتين ؟

8) بين أن متوسط السرعة بين الموضعين $Z$ و $Z'$ أقل من متوسط السرعة بين الموضعين $K$ و $P$ ؟




( الشكل **02** )

$II-$ بغية تسهيل الدراسة نفرض أن مسار الأرض حول الشمس هو مسار دائري :

1- مثل كلا من شعاع السرعة والقوة التي تطبقها الشمس على الأرض في الشكل 02 ؟

2- أكتب العبارة الشعاعية للقوة $\overrightarrow{F_{S/T}}$ بدلالة $\vec{u}, G, M_S, M_T, h, R_S, R_T$

3- بين انطلاقا من القانون الثاني لنيوتن أن حركة كوكب الأرض حول الشمس دائرية منتظمة .

4- أوجد وحدة المقدار $G$ باستعمال التحليل البعدي .

5- أوجد عبارة السرعة المدارية $v$ بدلالة $G, M_S, h, R_S, R_T$ .

6- عرف الدور ثم أكتب عبارته بدلالة $G, M_S, h, R_S, R_T$ . هل يتعلق الدور بكتلة الأرض ؟

7- أذكر نص قانون كيبلر الثالث ثم أوجد عبارة ثابت كيبلر $K$ وأحسب قيمته .

8- استنتج من القانون الثالث لكيبلر البعد بين سطح الشمس وسطح الأرض .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$III$– يسعى رجل الأعمال الأمريكي ( ايلون ماسك ) صاحب شركة $Space\ X$ إلى توصيل العالم بأكمله بالانترنت الفضائي عن طريق ارسال 12 ألف قمر اصطناعي خلال عدة أعوام ، في 23 مايو 2019 قامت الشركة باطلاق 60 قمر اصطناعي تدور في مدارات دائرية حول مركز الأرض .

نهتم في هذا الجزء بدراسة 6 أقمار اصطناعية خصائصها المدارية مسجلة في الجدول التالي :

| اسم القمر | $Starlink\ 1$ | $Starlink\ 2$ | $Starlink\ 3$ | $Starlink\ 4$ | $Starlink\ 5$ | $Starlink\ 6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_s(s)$ | 5706.7 | 6340 | 10575.4 | 86400 | 17244 | 20963.8 |
| $T_s{}^2(s^2)$ | | | | | | |
| $r(10^3m)$ | 6880 | 7380 | 10380 | 42105 | 14380 | 16380 |
| $r^3(10^{20}m^3)$ | | | | | | |

حيث $T_s$ يمثل دور كل قمر و $r$ البعد المتوسط بين مركزي القمر الصناعي والأرض .

1- ماهو المرجع المناسب لدراسة هذه الحركة ؟

2- بين أن التسارع لمركز عطالة أحد الأقمار يعطى بالعلاقة التالية : $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$

3- بين أن تسارع الجاذبية على ارتفاع $h$ يعطى بالعلاقة التالية : $g = g_0\left(\frac{R_T}{r}\right)^2$

4- عرف القمر الجيومستقر ؟ من بين الأقمار 6 السابقة حدد القمر الجيو مستقر ؟

5- إملئ الجدول ثم أرسم المنحنى البياني $T_{sat}{}^2 = f(r^3)$ .

6- أثبت العلاقة التالية : $\frac{T_{sat}{}^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ ثم أحسب كتلة الأرض $M_T$ معتمدا على البيان

7- أحسب ارتفاع هذا القمر الجيومستقر عن سطح الأرض ، وسرعته ثم تسارعه ؟

8- أذكر استعمالات الأقمار الاصطناعية ؟

**المعطيات :**

$$T = 365\ jours\ ;\ R_T = 6380\ km\ ;\ G = 6.67 \times 10^{-11}\ (SI)\ ;\ R_S = 7 \times 10^5\ Km$$

$$m_{sat} = 2300\ Kg\ ;\ g_0 = 9.81\ m/s^2\ ;\ \pi^2 = 10\ ;\ M_S = 2 \times 10^{30}\ Kg$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## حل تمرين حول حركة كوكب والأقمار الاصطناعية

### I– حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار اهليليجي :

1) المرجع المناسب الذي تنسبه إليه حركة الأرض هو المرجع الهيليومركزي

تعريف المرجع الهيلومركزي :

هو مرجع مزود بمعلم مبدؤه مركز الشمس ومحاوره الثلاثة متعامدة فيما بينها وموجهة نحو 3 نجوم ثابتة ، يستعمل لدراسة حركة الكواكب والمذنبات وبعض المركبات الفضائية .

الفرضية الواجب اعتمادها أثناء الدراسة : أن يكون المرجع عطالي ( غاليلي ) .

2) نص القانون الأول لكيبلر : في المرجع المركزي الشمسي تتحرك الكواكب حول الشمس في مسارات اهليليجية وتمثل الشمس أحد محرقيه ( بؤرتيه ) ويعرف بقانون المسارات .

3) طبيعة مسار كوكب الأرض : مسار اهليليجي . موقع الشمس بالنسبة لهذا المسار : أحد المحرقين في حالتنا الموضع $F_1$

4) يمثل الطول $2a$ طول المحور الكبير ، يمثل الطول $2b$ طول المحور الصغير .

حساب طول نصف المحور الكبير $a$ :

$$a = \frac{r_p + r_A}{2} = \frac{147.1 \times 10^6\ km + 152.1 \times 10^6}{2} \Longrightarrow a = 149.6 \times 10^6\ km$$

5) السرعة الأصغرية والسرعة الأعظمية :

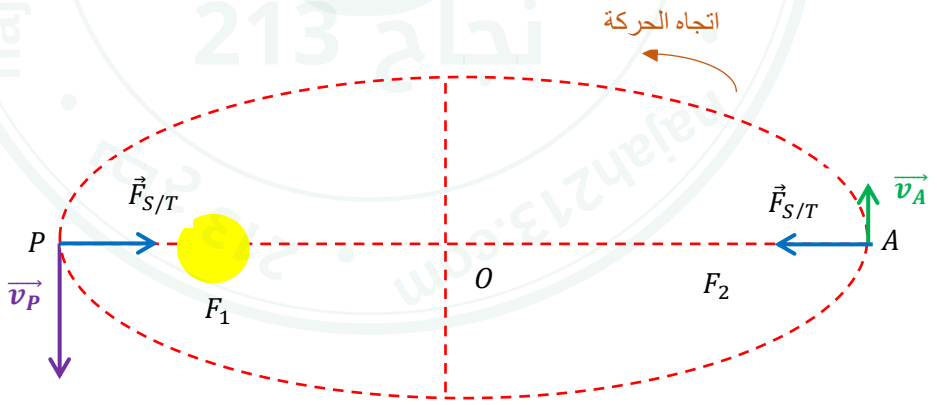
تكون السرعة أصغرية في نقطة الأوج $A$ .

تكون السرعة أعظمية في نقطة الحضيض $P$ .

6) تمثيل شعاعي سرعتيهما :

- نشعاع السرعة يكون عمودي على شعاع القوة ، وشعاع القوة يكون موجه نحو مركز عطالة الشمس .
- السرعة تكون أصغرية في نقطة الأوج $A$ وتكون أعظمية في نقطة الحضيض $P$ ومنه فشعاع السرعة عند نقطة الحضيض يكون أطول من شعاع السرعة في عند نقطة الأوج .
- جهة حركة كوكب الأرض تكون عكس اتجاه عقارب الساعة .

وبالتالي يصبح التمثيل على الشكل التالي :




7) نسمي المساحة الممسوحة بين النقطتين $Z$ و $Z'$ بـ $S_1$ والمساحة بين النقطتين $K$ و $P$ بـ $S_2$

حسب قانون كيبلر الثاني فإن $S_1 = S_2$

8) البرهان أن متوسط السرعة بين الموضعين $Z$ و $Z'$ أقل من متوسط السرعة بين الموضعين $K$ و $P$ :

لدينا : $\widehat{KP} > \widehat{ZZ'}$ ( نقصد بها طول القوس $KP$ أكبر من طول القوس $ZZ'$ )

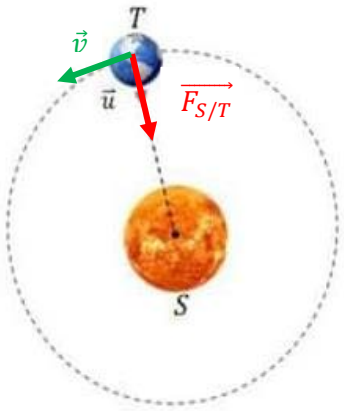
ونحن نعلم أن : السرعة $= \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ (مع العلم أن الزمن $\Delta t$ يبقى نفسه)

ومنه $\frac{\widehat{KP}}{\Delta t} > \frac{\widehat{ZZ'}}{\Delta t}$ أي $v_{KP} > v_{ZZ'}$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

## II– حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار دائري :




1- تمثيل كلا من شعاع السرعة والقوة التي تطبقها الشمس على الأرض ( الشكل المقابل )

2- العبارة الشعاعية للقوة $\overrightarrow{F_{S/T}}$ بدلالة $\vec{u}, G, M_T, M_s, h, R_s, R_T$

$$\overrightarrow{F_{S/T}} = G\frac{M_s M_T}{r^2}\vec{u} = G\frac{M_s M_T}{(R_s + R_T + h)^2}\vec{u}$$

ملاحظة : $r = R_s + R_T + h$ حيث :

$r$ يمثل البعد بين مركز الأرض ومركز الشمس

$R_s$ يمثل نصف قطر الشمس

$R_T$ تمثل نصف قطر الأرض

$h$ البعد بين سطح الأرض وسطح الشمس

3- تبيين أن حركة الأرض دائرية منتظمة انطلاقا من القانون الثاني لنيوتن :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة ( أرض ) في المرجع الهيلومركزي الذي نعتبره غاليليا لدينا

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$$
$$\overrightarrow{F_{S/T}} = M_T\vec{a}$$

نعلم أن : $\vec{a} = a_n\vec{u} + a_T\vec{T}$

ومنه بالاسقاط على الشعاع الناظمي لدينا :

$$G\frac{M_s \cancel{M_T}}{r^2} = \cancel{M_T}a_n$$
$$a_n = \frac{GM_s}{r^2}$$

بالاسقاط على الشعاع المماسي لدينا : $0 = M_T.a_T$ ومنه $a_T = 0$ أي $\frac{dv}{dt} = 0$ أي $v = cte$ ( السرعة ثابتة )

بما أن مسار الحركة دائري و السرعة ثابتة فإن حركة كوكب الأرض حول الشمس دائرية منتظمة

4- وحدة المقدار $G$ باستعمال التحليل البعدي :

لدينا $F = G.\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ومنه $G = \frac{F\times r^2}{M^2}$

$$[G] = \frac{[F]\times[r]^2}{[M]^2} = \frac{kg.m.s^{-2}m^2}{kg^2} = kg^{-1}.m^3.s^{-2}$$

ومنه وحدة $G$ في جملة الوحدات الدولية هي : $kg^{-1}.m^3.s^{-2}$

5- عبارة السرعة المدارية $v$ :

نعلم أن $a_n = \frac{v^2}{r}$ و منه $\frac{v^2}{r} = \frac{GM_s}{r^2}$ أي $v^2 = \frac{GM_s}{r}$ ومنه $v = \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$ وأخيرا $v = \sqrt{\frac{GM_s}{(R_s+R_T+h)}}$

6- الدور : هو الزمن اللازم للأرض للقيام بدورة كاملة حول الشمس ( أي $365\ jours$ ) .

عبارة الدور $T$ :

نعلم أن $T = \frac{2\pi r}{v}$ ومنه $T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_s}{r}}}$ ومنه $T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM_s}{r}}$ أي $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_s}$ ومنه : $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_s}}$ وأخيرا : $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_s+R_T+h)^3}{GM_s}}$

7- نص قانون كيبلر الثالث : يتناسب مربع الدور طردا مع مكعب البعد المتوسط بين مركز الكوكب ومركز الشمس .

$\frac{T^2}{r^3} = K$ حيث $K$ ثابت

ايجاد عبارة الثابت $K$ وحساب قيمته :

$$K = \frac{T^2}{r^3} = \frac{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_s}}{r^3} \Longrightarrow K = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$
$$K = \frac{4\times 10}{6.67\times 10^{-11}\times 2\times 10^{30}} \Longrightarrow K = 3\times 10^{-19}\ SI$$

من عبارة $K$ نجد أن الثابت $K$ لا يتعلق بكتلة كوكب الأرض بل يتعلق بكتلة كوكب الشمس .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

8- استنتاج البعد بين سطح الشمس وسطح الأرض$(h)$ من القانون الثالث لكيبلر :

$$K = \frac{T^2}{r^3} \Rightarrow r^3 = \frac{T^2}{K} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}}$$

نعلم أن $r = (R_s + R_T + h)$ ومنه : $R_s + R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}}$ وأخيرا : $h = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}} - R_s - R_T$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(365 \times 24 \times 3600)^2}{3 \times 10^{-19}}} - (7 \times 10^5 - 6380) \times 10^3$$

$$h = 1.48 \times 10^{11}\ m$$

## III– حركة قمر اصطناعي حول الأرض ضمن مسار دائري :

1- المرجع المناسب : المرجع الجيو مركزي ( المركزي الأرضي ) .

2- إثبات أن أن التسارع لمركز عطالة أحد الأقمار يعطى بالعلاقة التالية : $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$ :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة ( أرض ) في المرجع الهيلومركزي الذي نعتبره غاليليا لدينا : $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$

$$\overrightarrow{F_{T/sa}} = m_{sa}\vec{a}$$

بالاسقاط على الشعاع الناظمي لدينا :

$$G\frac{M_T\ \cancel{m_{sa}}}{r^2} = \cancel{m_{sa}}a_n$$

$$a_n = \frac{GM_T}{r^2} = G.M_T \times \frac{1}{r^2}$$

وهي من الشكل $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$ حيث $A = G.M_T$

ملاحظة : $r = R_T + h$ حيث :

$r$ تمثل البعد بين مركز الأرض والقمر الاصطناعي

$R_T$ تمثل نصف قطر الأرض

$h$ البعد بين سطح الأرض والقمر الاصطناعي

3- تبيين أن تسارع الجاذبية على ارتفاع $h$ يعطى بالعلاقة التالية : $g = g_0\left(\frac{R_T}{r}\right)^2$

نعلم أن $a = a_n = g$

ومنه (1) ... ... ... ... $g = GM_T\frac{1}{r^2} = GM_T\frac{1}{(R_T+h)^2}$

في الطرف الثاني لدينا :

(2) ... ... ... ... $g_0 = GM_T\frac{1}{{R_T}^2}$ ( عند $h = 0$ يكون $g_0$ ) لأن $g_0$ تعني الجاذبية على سطح الأرض .

بقسمة (2) على (1) لدينا : $\frac{g}{g_0} = \frac{\cancel{GM_T}\frac{1}{(R_T+h)^2}}{\cancel{GM_T}\frac{1}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$ ومنه نجد : $g = g_0\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2$ وأخيرا $g = g_0\left(\frac{R_T}{r}\right)^2$

4- تعريف القمر الجيو مستقر :

هو عبارة عن قمر اصطناعي يظهر لمراقب على سطح الأرض ساكنا ويمتاز بالشروط التالية :

- ✓ يدور في نفس جهة دوران الأرض
- ✓ لديه نفس دور الأرض $T = 24\ h = 24 \times 3600\ s = 86400\ s$
- ✓ يدور على مستوى خط الاستواء .

تحديد القمر الجيومستقر من بين 6 أقمار السابقة :

القمر الجيو مستقر من لديه دور يساوي $86400\ s$ ومنه القمر الذي لديه نفس دور الأرض من بين 6 أقمار السابقة هو القمر $Starlink\ 4$

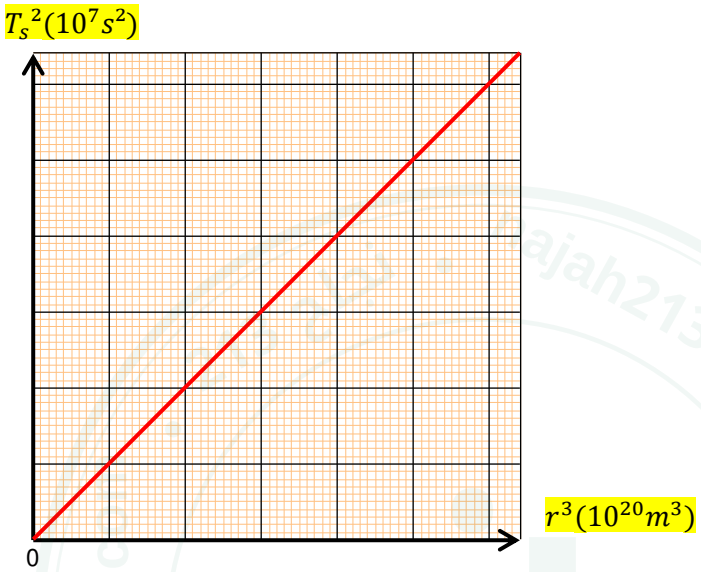


فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

5- ملأ الجدول :

| اسم القمر | $Starlink\ 1$ | $Starlink\ 2$ | $Starlink\ 3$ | $Starlink\ 4$ | $Starlink\ 5$ | $Starlink\ 6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_s(s)$ | 5706.7 | 6340 | 10575.4 | 86400 | 17244 | 20963.8 |
| $T_s{}^2(10^7 s^2)$ | 3.25 | 4.019 | 11.18 | 7.465 | 29.73 | 43.94 |
| $r(10^3 m)$ | 6880 | 7380 | 10380 | 42105 | 14380 | 16380 |
| $r^3(10^{20} m^3)$ | 3.25 | 4.019 | 11.18 | 7.465 | 29.73 | 43.94 |

رسم المنحنى $T^2 = f(r^3)$ :




6- اثبات العلاقة التالية : $\frac{T_s{}^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ :

لدينا : $a_n = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$ ونعلم أن $a_n = \frac{v^2}{(R_T+h)}$ أي $\frac{v^2}{(R_T+h)} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$ ومنه $v^2 = \frac{GM_T}{(R_T+h)}$ وأخيرا : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}$

نعلم أن $T_s = \frac{2\pi r}{v}$ ومنه $T_s = \frac{2\pi(R_T+h)}{\sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}}$ ومنه $T_s^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^2}{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}$ أي $T_s^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^3}{GM_T}$ ومنه : $T_s = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$

وأخيرا : $T_s = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$ وبالتالي :

$$\frac{T_s{}^2}{r^3} = \frac{4\pi^2 \frac{\cancel{r^3}}{GM_T}}{\cancel{r^3}} \Rightarrow \frac{T_s{}^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

ايجاد كتلة الأرض $M_T$ :

البيان عبارة عن خط مستقيم يمر بالمبدأ عبارته من الشكل : $T^2 = \beta r^3$ حيث $\beta$ هو معامل توجيه البيان .

$$\beta = \frac{T_s{}^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow M_T = \frac{4\pi^2}{G\beta}$$

$$\beta = \frac{(4.019 - 3.25) \times 10^7}{(4.019 - 3.25) \times 10^{20}} = 1 \times 10^{-13}$$

$$M_T = \frac{4\pi^2}{G\beta} = \frac{4 \times 10}{6.67 \times 10^{-11} \times 1 \times 10^{-13}}$$

$$M_T = 5.99 \times 10^{24}\ kg$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

7- حساب ارتفاع القمر الجيو مستقر عن سطح الأرض ( حساب $h$ ) :

لايجاد الارتفاع $h$ نستخدم عبارة الدور $T_s^2$ :

$$T_s^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM_T} \Longrightarrow r^3 = \frac{T_s^2 \times GM_T}{4\pi^2} \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times GM_T}{4\pi^2}}$$

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times GM_T}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times GM_T}{4\pi^2}} - R_T$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(24 \times 3600)^2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.99 \times 10^{24}}{4 \times 10}} - (6380 \times 10^3)$$

$$h = 35709000\ m\ = 35709\ km$$

حساب السرعة المدارية للقمر الجيومستقر :

لدينا مما سبق : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}$

$$v = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.99 \times 10^{24}}{(6380 + 35709) \times 10^3}}$$

$$v = 3081\ m/s$$

حساب تسارع القمر الجيومستقر :

$$a = g = g_0 \left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2$$

$$a = 9.81 \left(\frac{6380 \times 10^3}{(6380 + 35709) \times 10^3}\right)^2$$

$$a = 0.22\ m/s^2$$

8- استعمالات الأقمار الاصطناعية :

- الاتصالات
- الأحوال الجوية
- البث التلفزيوني
- تحديد المواقع $GPS$
- استعمالات عسكرية مختلفة

**ملاحظتين في الحسابات :**

يجب تحويل الأطوال إلى وحدة المتر $(m)$

يجب تحويل الدور إلى وحدة الثانية $(s)$