najah213.com · نجاح 213

تمارين محلولة

5 min Maths



الأعداد المركبة

للشعب العلمية



من تقديم الأستاذ شعبان أسامة

5min maths.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

تمارين محلولة في الأعداد المركبة

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين الأول:

I .المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E).....z^4-6z^3+24z^2-18z^2+63=0$

حل المعادلة (E) علما أنها تقبل حلين صرفين مترافقين.

II . نعتبر النقط C,B,A التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-i\sqrt{3}, z_B-3+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ و $z_C=3+2i\sqrt{3}$.

1.عين الكتابة الأسية للعدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

2.عين زاوية الدوران r الذي مركزه A و يحول B الى C ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3.عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

4. أ-عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث: $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

ب-عين z_D لاحقة النقطة D صورة A بالتحويل T.

التمرين الثاني:

نعتبر المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.أ- نعتبر النقط B,A و C التي لواحقها على الترتيب: $a=2$ و $b=3+i\sqrt{3}$ و $c=2i\sqrt{3}$. حدد قيس الزاوية $A\hat{B}C$.

ب-استنتج أن لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هي $1+i\sqrt{3}$.

2.لتكن (z_n) المتتالية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} z_0=0 \\ z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2 \end{cases}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ،نضع A_n النقطة التي لاحقتها z_n .

أ-بين أن النقط A_2, A_3 و A_4 هي النقط التي لاحقتها على التوالي $3+i\sqrt{3}$ ، $2+2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$.

(لاحظ أن: $A_1=A$ ، $A_2=B$ و $A_4=C$).

ب-قارن أطوال القطع $[A_1A_2],[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$.

3.أ-بين أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1}-\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$.

ب-استنتج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يطلب تحديد طبيعته و عناصره المميزة.

ج- بين أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6}=A_n$ ثم حدد لاحقة A_{2012} .

د-حدد طول القطعة $[A_nA_{n+1}]$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

التمرين الثالث:

I- نعتبر العدد المركب $Z=2+\sqrt{3}+i$.

1.بين أن طويلة Z هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

2.تحقق من أن : $Z=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3.أ-باستعمال قوانين موافر بين أن : $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$.

ب-بين ان: $Z=4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (نذكر أن : $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$) ثم أكتب العدد المركب Z على شكله المثلثي.

ج-بين أن: $Z^6=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$.

II- نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما $\omega=\sqrt{3}$ و Z على الترتيب ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2.

1.بين أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3})+2i$.

2.حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z-4-\sqrt{3}-2i|=|Z|$.

التمرين الرابع:

في كل حالة من الحالات الخمس الآتية اقترحت أربع اجابات، اجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل:

❶ . z عدد مركب يحقق $|z|+\bar{z}=6+2i$ ، الشكل الجبري للعدد هو:

أ- $\frac{8}{3}-2i$ ، ب- $-\frac{8}{3}-2i$ ، ج- $\frac{8}{3}+2i$ ، د- $-\frac{8}{3}+2i$.

❷ . في المستوي المركب، مجموعة النقط M ذات الاحقة $z=x+iy$ التي تحقق: $|z-1|=|z+i|$ هي المستقيم ذو المعادلة:

أ- $y=x-1$ ، ب- $y=-x$ ، ج- $y=-x+1$ ، د- $y=x$.

❸ . ليكن n عددا طبيعيا، العدد $(1+i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه n من الشكل :

أ- $3k+1$ ، ب- $3k+2$ ، ج- $3k$ ، د- $6k$ ، حيث $k\in\mathbb{N}$.

❹ . نعتبر المعادلة $(E): z=\frac{6-z}{3-z}$ مع $z\in\mathbb{C}$ ، حل للمعادلة (E) هو :

أ- $-2-i\sqrt{2}$ ، ب- $2+i\sqrt{2}$ ، ج- $1-i$ ، د- $-1-i$.

3

#تمارين في الأعداد المركبة « 5min Maths

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

❺. لتكن A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $z_A=i$ و $z_B=\sqrt{3}$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. اللاحقة z_c للنقطة C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$ هي:

أ- $-i$ ، ب- $2i$ ، ج- $\sqrt{3}+i$ ، د- $\sqrt{3}+2i$

التمرين الخامس:

ليكن z و z' عددان مركبان يحققان: $|z|=|z'|=1$ و $z.z'+1\neq 0$.

بين أن العدد $Z=\frac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي.

التمرين السادس:

1.عين العددين الحقيقين a و b بحيث: $(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$.

2.أ-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z: $z^2-4z+16=0$.

ب-استنتج في المجموعة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $z^4-4z^2+16=0$.

3.نعتبر العدد المركب z_k المعرف كما يلي: $z_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ حيث k عدد صحيح.

أ-بين أن: $z_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ ثم استنتج أن: $z_{2013}=0$

ب-أكتب العدد $-2^{2015}z_{2015}$ على الشكل $i\sqrt{n}$ حيث n عدد طبيعي يطلب تحديده.

4.المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B ذات الاحقتين على الترتيب: $z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $z_B=2-2i\sqrt{3}$ لتكن C النقطة ذات الاحقة: $z_c=5-2^{2015}z_{2015}$

أ-تحقق أن: $z_c=\frac{3}{2}z_B+z_B$.

ب-بين أن: $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=-2^{2015}z_{2015}$ ثم عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A الى B معينا عناصره المميزة ثم جد العبارة المركبة له.

5.لتكن A_0 النقطة ذات اللاحقة $z_0=\sqrt{3}-i$ من أجل كل عدد طبيعي n: $A_{n+1}=f(A_n)$ حيث z_n لاحقة A_n.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases}u_0=A_0A_1\\u_n=A_nA_{n+1}\end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n. (A_0A_1 يمثل الطول بين النقطتين)

أ-بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 و أساسها q.

ب-استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

التمرين السابع:

1.حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+2=0$.

2.استنتج حلول المعادلة: $\left(\frac{1}{z}+1\right)^2-2\left(\frac{1}{z}+1\right)+2=0$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z.

3.في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=1-i$ و $z_C=1+\sqrt{3}$.

أ-أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الأسي للعددين $\frac{1}{z_B}$ و $(z_A)^{2019}$.

ب-عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z-1-i|-|z-1+i|=0$.

ج-عين طويلة و عمدة العدد المركب L حيث: $L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

د-عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

4.عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$.

التمرين الثامن:

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الاحقة z النقطة M' ذات الاحقة z' حيث: $z'=\frac{1}{2}(1+i)z+1$

1.برر أن f تشابه مباشر يطلب تعين عناصره المميزة.

2.نسمي A_0 النقطة O و من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $A_{n+1}=f(A_n)$.

أ-عين لاحقات النقط A_1, A_2, A_3.

ب-من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $u_n=\Omega A_n$. حيث Ω مركز التحويل النقطي f.

بين أن المتتالية (u_n) هندسية ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

ج-ابتداء من أي رتبة n_0 تنتمي كل النقط A_n الى القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره $0,1$ ؟

3.ما طبيعة المثلث ΩA_0A_1 ؟ استنتج من أجل كل عدد طبيعي n ، طبيعة المثلث ΩA_nA_{n+1} .

4. من أجل كل عدد طبيعي n ، نرمز بالرمز I_n الى طول الخط المنكسر الذي يشمل النقط $A_0A_1A_2...A_{n-1}A_n$.

وعليه: $I_n=A_0A_1+A_1A_2+...+A_{n-1}A_n$.

عبرعن I_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

التمرين التاسع:

من أجل كل عدد مركب يختلف عن $-1+i$ ، نضع: $z'=\dfrac{2z-i}{z+1-i}$ حيث $z=x+iy$.

نعتبر المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط C,B,A التي لاحقاتها على الترتيب

$-1+i$ ، $\dfrac{1}{2}i$ و $-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i$.

1.حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\overline{z'}=-2$

2.حدد $\mathrm{Re}\left(z'\right)$ و $\mathrm{Im}\left(z'\right)$ بدلالة x و y.

3.حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

4.حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'|=2$.

5.بين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في C.

التمرين العاشر:

نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=z^3-\left(1-2\sin\alpha\right)z^2+\left(1-2\sin\alpha\right)z-1$ ، حيث α وسيط حقيقي.

1.أ-احسب $P(1)$.

ب-عين الاعداد الحقيقية c,b,a حيث $P(z)=\left(z-1\right)\left(az^2+bz+c\right)$.

2.حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

3.ليكن z_3,z_2,z_1 حلول المعادلة $P(z)=0$ حيث $z_1=1$.

أ-عين طويلة و عمدة الأعداد z_3,z_2,z_1.

ب-من أجل أي قيمة للوسيط α تكون كل من $|z_2+1|,|z_1|$ و $|z_3-1|$ بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية.

التمرين الحادي عشر:

من اجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $S_n=\left(1+i\right)^n+\left(1-i\right)^n$.

1.عين الشكل المثلثي للعدد S_n.

2.بين انه من أجل كل عدد طبيعي n ، S_n عدد حقيقي.

التمرين الثاني عشر:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=3-i\sqrt{3}$ و $z_C=-\sqrt{3}+3i$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

1.أكتب العدد z_A على الشكل الأسي ثمّ إستنتج الشكل الأسي للعدد z_B.

2. n عدد طبيعي، L_n هو العدد المركب المعرف بما يلي : $L_n=\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$ ، أحسب L_n بدلالة n ثمّ إستنتج قيمة L_{2018} يكتب على الشكل الجبري .

3.تحقق أنّ : $z_C=i\,z_A$ ثمّ إستنتج طبيعة المثلث OAC.

4.لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\arg(3+i\sqrt{3}-z)-\arg(-\sqrt{3}+3i-z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

مع $k\in\mathbb{Z}$ ،تحقق أنّ النقطة O تنتمي إلى (Γ) ثمّ عين طبيعتها .

5 .نعتبر النقطة D ذات اللاحقة $z_D=\overline{z_C}$ ، بيّن أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان .

6. لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=3-\sqrt{3}$ ، S التشابه المستوي المباشر الذي مركزه E ويحول النقطة A إلى النقطة C. عين نسبة وزاوية التشابه S ، ثمّ إستنتج أنّ النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathcal{C})$ يطلب تعيين عناصرها.

التمرين الثالث عشر:

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)(z^2-4z+8)=0$.

2.المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2-2i$ ، $z_B=4$ ، $z_C=\overline{z_A}$ ، $z_D=-z_A$ و $z_E=-6-2i$.

أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ، ثمّ إستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S.

ب) تحقق أنّ النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$.

ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z+4|=8$

تحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ)وعناصرها المميّزة .

د) تحقق أنّ $S(D)=E$ ، ثمّ بيّن أنّ الدائرة (Γ')التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

حلول التمارين

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

حل التمرين الأول:

I. لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E).....z^4-6z^3+24z^2-18z+63=0$

حل المعادلة (E) علما أنها تقبل حلين صرفين مترافقين

لدينا\: $(E).....z^4-6z^3+24z^2-18+63=0$.

نفرض أن: αi و $-\alpha i$ هما الحلان الصرفيان المترافقان مع $\alpha\in\mathbb{R}$.

و عليه لدينا من أجل كل عدد مركب z :

$$P(z)=(z-\alpha i)(z+\alpha i)(az^2+bz+c)$$
$$P(z)=(z^2+\alpha^2)(az^2+bz+c)$$
$$P(z)=az^4+bz^3+(\alpha^2a+c)z^2+\alpha^2bz+c\alpha^2$$

بالمطابقة ينتج: $\alpha^2=3\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\sqrt{3}\\ \alpha=-\sqrt{3}\end{cases}$ $\begin{cases}a=1\\ b=-6\\ \alpha^2a+c=24\Rightarrow a=1,b=-6,\alpha^2=3,c=21\\ \alpha^2b=-18\\ \alpha^2c=63\end{cases}$

$$P(z)=(z^2+3)(z^2-6z+21)$$

اذن: $P(z)=0\Rightarrow\begin{cases}(z^2+3)=0\Rightarrow z=i\sqrt{3},z'=-i\sqrt{3}\\ (z^2-6z+21)=0\Rightarrow z=3-2i\sqrt{3},z'=3+2i\sqrt{3}\end{cases}$

$$S=\{-i\sqrt{3},3-2i\sqrt{3},i\sqrt{3},3+2i\sqrt{3}\}$$

II. نعتبر النقط C,B,A التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-i\sqrt{3},z_B=-3+2i\sqrt{3}$ و $z_C=3+2i\sqrt{3}$.

1.عين الكتابة الأسية للعدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

$$z_C-z_A=3+3i\sqrt{3}=6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$z_B-z_A=-3+3i\sqrt{3}=6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$ و عليه
$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}=e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$

2.تعين زاوية الدوران r الذي مركزه A و يحول B الى C ،

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} = e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$

$z_C - z_A = (z_B - z_A)e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$

و هذا يعني: أن النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} == e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$ تعني: ان:

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow (AC = AB)$

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right) = \left(\frac{-\pi}{3}\right)$

و بهذا نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3.تعين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = i\sqrt{3}$

4.أ-تعين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث:
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

لدينا: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ ومنه: $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$ باستعمال علاقة شال نجد: $\overrightarrow{GM'} - \overrightarrow{GM} = 3\overrightarrow{MG}$

وبالتالي: $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$ نستنتج أن النقطة M' هي صورة نقطة M بالتحاكي الذي مركزه النقطة G و نسبته -2

من العلاقة: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ يكون لدينا:

$z' - z = (z_A - z) + (z_B - z) + (z_C - z)$

أي: $z' = -2z + (z_A + z_B + z_C)$

$z' = -2z + 3z_G$

ب-تعين z_D لاحقة النقطة D صورة A بالتحويل T.

أي: $z_D = -2z_A + 3z_G$

$z_D = 5i\sqrt{3}$

حل التمرين الثاني:

1.أ-تحدد قيس الزاوية $A\hat{B}C$. نعتبر النقط B, A و C التي لواحقها على الترتيب: $a = 2, b = 3 + i\sqrt{3}$ و $c = 2i\sqrt{3}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)$$

لدينا:

$$\frac{c-b}{a-b}=\frac{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{2-3-i\sqrt{3}}$$

$$=-i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)=\frac{-\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$$

ب-استنتاج أن ω لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هي $1+i\sqrt{3}$.

بما أن المثلث ABC قائم في B فان $[AC]$ يمثل قطر الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و بالتالي: $\omega=\frac{a+c}{2}=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$

2.لتكن (z_n) المتتالية المعرفة كما يلي : $\begin{cases}z_0=0\\z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2\end{cases}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، نضع A_n النقطة التي لاحقتها z_n .

أ-بين أن النقط A_2,A_3 و A_4 هي النقط التي لاحقتها على التوالي $3+i\sqrt{3}$ ، $2+2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$.

(لاحظ أن: $A_1=A$ ، $A_2=B$ و $A_4=C$).

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_0+2=2=a$$

$$z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1+2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(2)+2=1+i\sqrt{3}+2=3+i\sqrt{3}=b$$

$$z_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_2+2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(3+i\sqrt{3}\right)+2=2+2i\sqrt{3}$$

$$z_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_3+2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(2+2i\sqrt{3}\right)+2=2i\sqrt{3}=c$$

ب-مقارنة أطوال القطع $[A_1A_2]$,$[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$.

$$A_3A_4=|z_4-z_3|=2\quad A_2A_3=|z_3-z_2|=2\quad A_1A_2=|z_2-z_1|=2$$

اذن: $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4$

3.أ-اثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1}-\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$.

ليكن n من $\mathbb{N}$:

$$z_{n+1}-\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2-1-i\sqrt{3}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1-i\sqrt{3}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right)$$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$$

ب-استنتاج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يطلب تحديد طبيعته و عناصره المميزة.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

بما أن : $z_{n+1}-\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$

أي: $z_{n+1}-\omega=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n-\omega)$

فان A_{n+1} هي صورة A_n بالدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

ج-اثبات أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6}=A_n$

نضع: $v_n=z_n-\omega$ لدينا: (v_n) متتالية هندسية أساسها $e^{\frac{i\pi}{3}}$ و حدها الأول $v_0=-\omega$ اذن:

$$v_n=-\omega\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^n=-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}$$

$$z_n=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}$$

ومنه:

$$z_{n+6}=\omega-\omega e^{\frac{i(n+6)\pi}{3}}=\omega-\omega e^{\frac{i(n+6)\pi}{3}}=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}e^{i2\pi}=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}=z_n$$

$$e^{i2\pi}=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=1$$

$$z_{2012}=\omega-\omega e^{\frac{i(2012)\pi}{3}}=z_2=3+i\sqrt{3}$$

د-تحدد طول القطعة $[A_nA_{n+1}]$:

نضع $d_n=A_nA_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|$

بحساب d_{n+1} نجد: $d_{n+1}=d_n$ اذن : (d_n) متتالية ثابتة و منه:

$$d_n=d_1=A_1A_2=2$$
$$A_nA_{n+1}=2$$

حل التمرين الثالث:

I- نعتبر العدد المركب $Z=2+\sqrt{3}+i$.

1.بين أن طويلة Z هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$$|Z|=\left|2+\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

2.التحقق من أن : $Z=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$Z=2+\sqrt{3}+i=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i.2\frac{1}{2}=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

3.أ- اثبات أن : $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$.

نعلم أن:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^2(\theta)=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2=\frac{e^{2i\theta}+2e^{2i\theta}.e^{-2i\theta}+e^{-2i\theta}}{4}=\frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{4}$$ و منه:

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\left[\cos(2\theta)+1\right]$$

$$\Rightarrow 1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$$

ب-اثبات ان: $Z=4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

(نذكر أن : $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$)

$$Z=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right)\right)+2i\sin\left(\frac{2\pi}{12}\right)$$

لدينا: $$=2\times 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+i2\times 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

كتابة العدد المركب Z على شكله المثلثي: بما أن:

$$4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0\Rightarrow|Z|=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$Z=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

ج-اثبات أن: $Z^6=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$.

$$Z^6=\left(|Z|\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\right)^6$$

$$=|Z|^6\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^6$$

$$=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6\left[\cos\left(\frac{6\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{12}\right)\right]$$ و منه حسب موافر:

$$=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$Z^6=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$$

II- نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما $\omega=\sqrt{3}$ و Z على الترتيب ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2.

1.البرهان على أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3})+2i$.

$$d-\omega=2(p-\omega)$$
أي: $d=2p-\omega$ اذن : لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3})+2i$.
$$d=\left(4+\sqrt{3}\right)+2i$$

2.تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z-4-\sqrt{3}-2i|=|Z|$.

$|z-4-\sqrt{3}-2i|=|Z|$ تكافئ : $|z-d|=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

اذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي دائرة مركزها النقطة D و نصف قطرها $4\left(2+\sqrt{3}\right)$.

حل التمرين الرابع:

❶. z عدد مركب يحقق $\bar{z}+|z|=6+2i$ ،

يكفي التعويض في الشكل الجبري في العلاقة المعطاة نجد: $\frac{8}{3}+2i+\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+4}=\frac{8}{3}+2i+\frac{10}{3}=6+2i$

الشكل الجبري للعدد هو: $\frac{8}{3}-2i$ الاجابة (أ)

❷. ليكن عدد مركب z ، نضع $z=x+iy$.

$|z-1|=|z+i|$ معناه:

$$|z-1|^2=|z+i|^2$$
$$(x-1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2$$
أي:
$$x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2+2y+1$$
$$y=-x$$

الاجابة (ب)

❸. n عدد طبيعي،

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\left|1+i\sqrt{3}\right|=2$$

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

أي:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n=2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

العدد $(1+i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه : $2^n\sin\frac{n\pi}{3}=0\Rightarrow\frac{n\pi}{3}=k\pi$ الاجابة (ج).

$n=3k,(k\in\mathbb{N})$

❹. حل للمعادلة (E):

$$z=\frac{6-z}{3-z}\Leftrightarrow\frac{z(3-z)}{3-z}=\frac{6-z}{3-z}\Leftrightarrow 3z-z^2=6-z$$

و منه: $\Rightarrow z^2-4z+6=0\Rightarrow\begin{cases}z_1=2+i\sqrt{2}\\z_2=2-i\sqrt{2}\end{cases}$ الاجابة (ب)

❺. لتكن A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $z_A=i$ و $z_B=\sqrt{3}$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. اللاحقة z_c للنقطة C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$ هي:

ABC مثلث متقايس الأضلاع اذا كانت C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

$$z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_B-z_A\right)$$

بعد النشر نجد: $z_C=\sqrt{3}+2i$ الاجابة (د).

$$z_C-i=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)$$

حل التمرين الخامس:

ليكن z و z' عددان مركبان يحققان: $|z|=|z'|=1$ و $z.z'+1\neq 0$.

العدد $Z=\frac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي معناه: $Z=\overline{Z}$

اذن: $\overline{Z}=\left(\overline{\frac{z+z'}{1+zz'}}\right)=\frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{zz'}}=\frac{\frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{\overline{z'}}}{1+\frac{1}{\overline{z}}.\frac{1}{\overline{z'}}}=\frac{z+z'}{1+zz'}=Z$

لأن: $\overline{z}=\frac{1}{z}$ و $\overline{z'}=\frac{1}{z'}$.

وبالتالي: العدد $Z=\frac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل التمرين السادس:

1.تعين العددين الحقيقين a و b بحيث: $(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$.

لدينا: بالمطابقة تجد:
$$(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}\Rightarrow a^2+2ai-1=2+2i\sqrt{3}$$
$$2ai=2i\sqrt{3}\Rightarrow a=\sqrt{3}$$

بنفس العملية:
$$(b-i)^2=22i\sqrt{3}\Rightarrow b^2-2bi-1=2-2i\sqrt{3}$$
$$-2bi=-2i\sqrt{3}\Rightarrow b=\sqrt{3}$$

و بالتالي: $a=b=\sqrt{3}$.

2.أ-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+16=0$

$$z^2-4z+16=0$$
$$\Delta=-48=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$$
أي:
$$z_1=2+2i\sqrt{3}, z_2=2-2i\sqrt{3}$$
$$S=\left\{2+2i\sqrt{3};2-2i\sqrt{3}\right\}$$

ب-استنتاج حلول المعادلة: $z^4-4z^2+16=0$.

نضع: $z'=z^2$ المعادلة : $z^4-4z^2+16=0$ تصبح: $z'^2-4z'+16=0$

معناه مما سبق:
$$z_1^2=z'_1=2+2i\sqrt{3}$$
$$z_2^2=z'_2=2-2i\sqrt{3}$$

علينا حساب الجذران التربيعيان لكل من : z'_1 و z'_2.

نلاحظ من السؤال 1. لدينا : الجذر التربيعي للعدد $2+2i\sqrt{3}$ هو: $\sqrt{3}+i$ أو $-\sqrt{3}-i$

الجذر التربيعي للعدد $2-2i\sqrt{3}$ هو: $\sqrt{3}-i$ أو $-\sqrt{3}+i$.

و بالتالي: $S=\left\{\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}-i;\sqrt{3}-i;-\sqrt{3}+i\right\}$.

3. أ- لدينا: $z_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$

اثبات أن:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$z_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

$$z_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

$$=z_k=\frac{1}{2^k}2i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

$$z_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

استنتاج أن: $z_{2013}=0$

$$z_{2013}=\frac{i}{2^{2013-1}}\sin\left(\frac{2013\pi}{3}\right)=\frac{i}{2^{2012}}\sin(\pi)=0$$

ب-كتابة العدد $-2^{2015}z_{2015}$ على الشكل $i\sqrt{n}$ حيث n.

$$-2^{2015}z_{2015}=-2^{2015}z_{2015}=-2^{2015}\frac{i}{2^{2014}}\sin\left(\frac{2015\pi}{3}\right)$$

$$=-2i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+671\pi=-2i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)=\sqrt{3}i$$

و بالتالي: $n=3$

4. $z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $z_B=2-2i\sqrt{3}$ لتكن C النقطة ذات الاحقة: $z_c=5-2^{2015}z_{2015}$

أ-التحقق أن: $z_c=\frac{3}{2}z_B+z_B$.

لدينا: $z_{2015}=5+i\sqrt{3}$ $z_c=5-2^{2015}$ و لدينا كذلك:

$$z_C=\frac{3}{2}z_B+z_B$$

أي:

$$z_C=\frac{3}{2}\left(2+2i\sqrt{3}\right)+\left(2-2i\sqrt{3}\right)=5+i\sqrt{3}$$

ب-اثبات أن:

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=-2^{2015}z_{2015}$$

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{2-2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}=\frac{-3-3i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$$

$$=i\sqrt{3}=-2^{2015}z_{2015}$$

تعين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A الى B.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i\sqrt{3} \Leftrightarrow z_B - z_C = i\sqrt{3}\left(z_A - z_C\right)$$

اذن : التحويل النقطي f هو تشابه مباشرمركزه C ونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{cases} |z_B - z_C| = \sqrt{3}|z_A - z_C| \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CB = \sqrt{3}CA \\ \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

العبارة المركبة: تكتب من الشكل:

$$Z' = a'Z + b'$$

$$\begin{cases} a' = i\sqrt{3} \\ b' = z_C(1 - a') \Rightarrow b' = 8 - 4i\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow Z' = i\sqrt{3}Z + 8 - 4i\sqrt{3}$$

5.نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = A_0.A_1 \\ u_n = A_nA_{n+1} \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ-بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 و أساسها q.

لدينا:

$$u_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|i\sqrt{3}z_{n+1} + 8 - 4i\sqrt{3} - i\sqrt{3}z_n - 8 + 4i\sqrt{3}\right|$$

و بالتالي: $u_{n+1} = \left|i\sqrt{3}z_{n+1} - i\sqrt{3}z_n\right| = \left|i\sqrt{3}\left(z_{n+1} - z_n\right)\right| = \left|i\sqrt{3}\right|\left|\left(z_{n+1} - z_n\right)\right| = \sqrt{3}u_n$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{3}u_n$$

اذن: $q = \sqrt{3}$ هو أساس هذه المتتالية و حدها الأول:

$$u_0 = A_0.A_1 = |z_1 - z_0| = \left|i\sqrt{3}z_0 + 8 - 4i\sqrt{3} - z_0\right|$$

نعلم أن: $z_0 = \sqrt{3} - i$

$$u_0 = \left|i\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - i\right) + 8 - 4i\sqrt{3} - \left(\sqrt{3} - i\right)\right| = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$$

ب-استنتاج عبارة u_n بدلالة n: $u_n = u_0 \times q^n = \left(\sqrt{3}\right)^n \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$

ج- حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

$$S_n = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}\left(\frac{1 - \left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\sqrt{3}\right)}\right) = \left[\frac{\sqrt{128 - 32\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{3}}\right]\left(1 - \left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right)$$

حل التمرين السابع:

1.حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$z^2-2z+2=0$

أي: $\Delta=-4=4i^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=2i$

$$\begin{cases}z_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i\\ z_2=\overline{z_1}=1+i\end{cases}\Rightarrow S=\{1+i;1-i\}$$

2.استنتاج حلول المعادلة: $\left(\dfrac{1}{z}+1\right)^2-2\left(\dfrac{1}{z}+1\right)+2=0$:

نضع: $z'=\dfrac{1}{z}+1$ المعادلة تصبح: $z'^2-2z'+2=0$ تكافئ المعادلة: $z^2-2z+2=0$.

$$\begin{cases}z'_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i\\ z'_2=\overline{z'_1}=1+i\end{cases}$$

و منه: $\dfrac{1}{z}+1=1-i\Rightarrow\dfrac{1}{z}=-i\Rightarrow\dfrac{1}{z}=i\Rightarrow z_3=-i$

$z_4=\overline{z_3}=\overline{-i}=i$

$S=\{-i;i\}$

3.

لدينا: $z_A=1+i$ ' $z_B=1-i$ و $z_C=1+\sqrt{3}$.

أ-أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي:

$$\begin{cases}|z_A|=\sqrt{2}\\ \arg(z_A)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow z_A=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$z_B=\overline{z_A}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

استنتاج الشكل الأسي للعددين $\dfrac{1}{z_B}$ و $(z_A)^{2019}$:

$$\frac{1}{z_B}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

و بالتالي: $(z_A)^{2019}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2019}=\left(\sqrt{2}\right)^{2019}e^{i\frac{2019\pi}{4}}$

$(z_A)^{2019}=\left(\sqrt{2}\right)^{2019}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

ب-تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z-1-i|-|z-1+i|=0$.

$|z-1-i|-|z-1+i|=0$

$|z-1-i|=|z-1+i|$

لدينا: $|z-(1+i)|=|z-(1-i)|$ اذن مجموعة النقط هي محور القطعة $[AB]$.

$|z_M-z_A|=|z_M-z_B|$

$AM=BM$

ج-تعين طويلة و عمدة العدد المركب L حيث: $L=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1+i-1-\sqrt{3}}{1-i-1-\sqrt{3}}=\frac{i-\sqrt{3}}{-i-\sqrt{3}}=\frac{\left(i-\sqrt{3}\right)}{\left(-i-\sqrt{3}\right)}\times\frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)}{\left(-\sqrt{3}+i\right)}$$

$$L=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\begin{cases}|L|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1\\ \arg(L)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

و منه نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$$\begin{cases}\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=1\Rightarrow CA=CB\\ \arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

د-تعين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC :

$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{1+i+1-i+1+\sqrt{3}}{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ و منه نجد: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

4.تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$.

بما أن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1)(B;1)(C;1)\}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

باستعمال علاقة شال لدينا: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

و منه:

$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$ تصبح:

$\left(3\overrightarrow{MG}\right)\left(-\overrightarrow{AB}\right)=0$

$-3\left(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AB}\right)=0\Rightarrow\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AB}=0$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم الذي يشمل النقطة G و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له.ى

حل التمرين الثامن:

1.لدينا: $M(z)\xrightarrow{f}M'(z')$ حيث: $z'=\frac{1}{2}(1+i)z+1$

العبارة المركبة للتحويل النقطي f هي من الشكل: $z'=az+b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب

لدينا: $a=\frac{1}{2}(1+i)$ و منه: $a=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ نستنتج أن: $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$.

و من جهة ثانية فان ω لاحقة النقطة Ω: $\omega=\frac{b}{1-a}=1+i$.

اذن التحويل النقطي f هو تشابه مباشر نسبته $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\theta=\frac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة Ω.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

2. أ- نضع: $A_{n+1}=f\left(A_n\right)$ و منه $z_{n+1}=\frac{1}{2}(1+i)z_n+1$

$$z_1=\frac{1}{2}(1+i)z_0+1\Rightarrow z_1=1$$
و عليه: $$z_2=\frac{1}{2}(1+i)z_1+1\Rightarrow z_2=\frac{1}{2}(3+i)$$
$$z_3=\frac{1}{2}(1+i)z_2+1\Rightarrow z_3=\frac{3}{2}+i$$

ب-من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $u_n=\Omega A_n$:

لدينا: $u_{n+1}=\Omega A_{n+1}$ و بما أن: $A_{n+1}=f\left(A_n\right)$ فان:
$$\begin{cases}\Omega A_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n\\ \left(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right)=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

و منه: $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n$ نستنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)$ هندسية أساسها $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و حدها الاول $u_0=\sqrt{2}$.

و بالتالي: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

ج- تنتمي كل النقط A_n الى القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره $0,1$ اذا و فقط اذا $\Omega A_n\le 0,1$

$$u_n\le 0,1\Rightarrow\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le 0,1$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le\frac{0,1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le\ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)$$
يعني: $$n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le\ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)$$
لأن: $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$
$$\Leftrightarrow n\ge\frac{\ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

بالتقريب نجد: $n\ge 7,57$ و منه $n_0=8$.

3.أ- طبيعة المثلث ΩA_0A_1 :

المثلث ΩA_0A_1 قائم في A_1 و متساوي الساقين لان: $\Omega A_1=A_0A_1=1$ و كذلك $(\Omega A_1)\perp(A_0A_1)$.

من خواص التشابه المباشرنستنتج أن المثلث ΩA_nA_{n+1} قائم في A_{n+1} و متساوي الساقين.

4. لدينا: $I_n=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$ و منه: $I_n=\Omega A_1+\Omega A_2+\ldots+\Omega A_n$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

و بالتالي: $I_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

بما أن متتالية هندسية فان :

$$I_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$$

لأن $-1<q<1$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

حل التمرين التاسع:

نضع: $z' = \dfrac{2z-i}{z+1-i}$ حيث $z = x+iy$.

1. حل المعادلة: $\overline{z'} = -2$ يعني: $\overline{\left(\dfrac{2z-i}{z+1-i}\right)} = -2$ معناه:

$$\frac{2\bar{z}-i}{\bar{z}+1-i} = -2 \Rightarrow 2\bar{z}-i = -2\left(\bar{z}+1-i\right)$$

$$\Rightarrow \bar{z} = -\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i \text{ : أي}$$

$$z = -\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i$$

2. تحدد $\mathrm{Re}(z')$ و $\mathrm{Im}(z')$ بدلالة x و y.

$$\mathrm{Re}(z') = \mathrm{Re}\left(\frac{2z-i}{z+1-i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2(x+iy)-i}{x+iy+1-i}\right) = \frac{2x^2+2y^2+2x+3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(z') = \frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

3. تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

z' حقيقي معناه: $\mathrm{Im}(z')=0$ يعني: $\dfrac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-1=0 \\ (x+1)^2+(y-1)^2 \neq 0 \end{cases}$

اذن مجموعة النقط M هي المستقيم ذا المعادلة $x+2y-1=0$ ما عدا النقطة $A(-1;1)$.

4. تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'|=2$.

$|z'|=2$ معناه:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\left|\frac{2z-i}{z+1-i}\right|=2\Rightarrow\frac{|2z-i|}{|z+1-i|}=2$$

و منه:
$$\frac{\left|2\left(z-\frac{1}{2}i\right)\right|}{|z+1-i|}=2\Rightarrow\left|z-\frac{1}{2}i\right|=|z+1-i|$$
$$|z-z_B|=|z-z_A|$$
$$AM=AB$$

و منه مجموعة النقط M التي تحقق $|z'|=2$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

5.اثبات المثلث ABC متساوي الساقين و في قائم النقطة C.

لدينا: $\begin{cases}|z_A-z_C|=\frac{1}{4}\sqrt{10}\\|z_B-z_C|=\frac{1}{4}\sqrt{10}\\|z_A-z_B|=\frac{1}{2}\sqrt{5}\end{cases}$ و منه نستنتج أن $AC=BC$ اذن المثلث ABC متساوي الساقين....(1)

و لدينا : $AC^2+BC^2=BA^2$ اذن المثلث ABC قائم في C....(2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين و في قائم النقطة C.

حل التمرين العاشر:

1. .أ-احسب $P(1)$:

$$\begin{aligned}P(1)&=1^3-(1-2\sin\alpha)(1)^2+(1-2\sin\alpha)-1\\&=1-(1-2\sin\alpha)+(1-2\sin\alpha)-1\\&=0\end{aligned}$$

و منه: $P(1)=0$.

ب-تعين الاعداد الحقيقية a,b,c:

$$\begin{aligned}P(z)&=(z-1)(az^2+bz+c)\\&=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد: $\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b-a=-(1-2\sin\alpha)\\c-b=1-2\sin\alpha\\-c=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\sin\alpha\\c=1\end{cases}$.

$$P(z)=(z-1)(z^2+(2\sin\alpha)z+1)$$

2.حل المعادلة $P(z)=0$:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$P(z)=0 \Leftrightarrow P(z)=(z-1)\left(z^2+(2\sin\alpha)z+1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} z-1=0 \\ z^2+(2\sin\alpha)z+1=0 \end{cases}$$

$$z_1=1$$

اذن: $z^2+(2\sin\alpha)z+1=0 \Rightarrow \Delta'=(i\cos\alpha)^2$

$$\begin{cases} z'=-\sin\alpha+i\cos\alpha \\ z''=-\sin\alpha-i\cos\alpha \end{cases}$$

$$S=\{1;-\sin\alpha+i\cos\alpha;-\sin\alpha-i\cos\alpha\}$$

لأن: $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

3.ليكن z_1, z_2, z_3 حلول المعادلة $P(z)=0$ حيث $z_1=1$.

أ-تعين طويلة و عمدة الأعداد z_1, z_2, z_3 :

$$z_1=1=1.e^{i0}$$

$$z_2=-\sin\alpha+i\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=1e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$z_3=-\sin\alpha-i\cos\alpha=\overline{z_2}=1.e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

ب- الحدود $|z_1|,|z_2+1|$ و $|z_3-1|$ بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية معناه:

حسب خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$|z_1|^2=|z_2+1|\times|z_3-1|$$

يعني: $\Leftrightarrow 1=|z_2.z_3-z_2+z_3-1|$

$\Leftrightarrow 1=\left|1-z_2+\overline{z_2}-1\right|$

$\Leftrightarrow 1=|-2i\cos\alpha|$

$$\Leftrightarrow 1=2|\cos\alpha| \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=\frac{1}{2} \\ \cos\alpha=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

و بالتالي: $\alpha=\frac{\pi}{3}$ أو $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

حل التمرين الحادي عشر:

لدينا:

$$\begin{cases} |1+i|=\sqrt{2} \\ \arg(1+i)=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow 1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

و بما أن : $1-i=\overline{1+i}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2.لدينا: نعلم أن: $\cos x=\cos(-x)$ و $\sin(-x)=-\sin x$ اذن:

$$S_n=(1+i)^n+(1-i)^n=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{in\frac{\pi}{4}}+e^{-in\frac{\pi}{4}}\right)$$

باستعمال خاصية موافر:

$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-n\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

حل التمرين الثاني عشر:

لدينا : $z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=3-i\sqrt{3}$ و $z_C=-\sqrt{3}+3i$.

1) كتابة العدد z_A على الشكل الأسي ثمّ إستنتاج الشكل الأسي للعدد z_B :

لدينا : $z_A=3+i\sqrt{3}$

حساب الطويلة : $|z_A|=\left|3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$

تعيين عمدة للعدد z_A : نضع $\theta_A=\arg(z_A)$

إذن : $\begin{cases}\cos\theta_A=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_A=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

الشكل الأسي للعدد z_A هو: $z_A=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

إستنتاج الشكل الأسي للعدد z_B :

$$z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

2) لدينا : العدد المركب $L_n=\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$

حساب L_n بدلالة n :

لدينا : $L_n=\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n=\left(\dfrac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\dfrac{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n=e^{i\times n\frac{\pi}{6}}+e^{-i\times n\frac{\pi}{6}}$

ومنه : $L_n=e^{in\frac{\pi}{6}}+e^{-in\frac{\pi}{6}}=\cos\dfrac{n\pi}{6}+i\sin\dfrac{n\pi}{6}+\cos\left(-\dfrac{n\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{n\pi}{6}\right)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

أي $L_n = e^{i\frac{n\pi}{6}} + e^{-i\frac{n\pi}{6}} = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6} + \cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}$

وبالتالي : $L_n = 2\cos\frac{n\pi}{6}$

إستنتاج قيمة L_{2018} :

$$L_{2018} = 2\cos\left(\frac{2018\pi}{6}\right) = 2\cos\left(336\pi + \frac{2\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{1}{2} = 1$$

إذن $L_{2018} = 1$

3) التحقق أنّ $z_C = i\,z_A$ ثمّ إستنتاج طبيعة المثلث OAC:

لدينا : $i\,z_A = i\left(3 + i\sqrt{3}\right) = 3i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + 3i = z_C$

أي $z_C = i\,z_A$

إستنتاج طبيعة المثلث OAC :

لدينا : $z_C = i\,z_A$ ومنه $\frac{z_C}{z_A} = i$ أي $\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = i$

إذن لدينا : $\left|\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O}\right| = |i| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

وبالتالي : $OC = OA$ و $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث OAC قائم ومتساوي الساقين

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$\arg\left(3 + i\sqrt{3} - z\right) - \arg\left(-\sqrt{3} + 3i - z\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

التحقق أنّ النقطة O تنتمي إلى (Γ) ثمّ تعيين طبيعتها :

O تنتمي إلى (Γ) يعني $\arg\left(3 + i\sqrt{3} - z_O\right) - \arg\left(-\sqrt{3} + 3i - z_O\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

لدينا : $\arg\left(3 + i\sqrt{3} - z_O\right) - \arg\left(-\sqrt{3} + 3i - z_O\right) = \arg\left(3 + i\sqrt{3}\right) - \arg\left(-\sqrt{3} + 3i\right)$

أي $\arg\left(-\sqrt{3} + 3i - z_O\right) - \arg\left(3 + i\sqrt{3} - z_O\right) = \arg(z_A) - \arg(z_C) = \arg(z_A) - \arg(i \times z_A)$

ومنه : $\arg\left(-\sqrt{3} + 3i - z_O\right) - \arg\left(3 + i\sqrt{3} - z_O\right) = \arg(\ z_A) - \arg(z_A) - \arg(i) = -\frac{\pi}{2}$

ومنه $O \in (\Gamma)$

تعيين طبيعة (Γ):

$\arg\left(3 + i\sqrt{3} - z\right) - \arg\left(-\sqrt{3} + 3i - z\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ يعني

$\arg(z_A - z) - \arg(z_C - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومنه $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

أي $\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي نصف الدائرة التي أحد أقطارها القطعة $[AC]$ والتي تشمل

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

النقطة O ماعدا النقطتين A و C

5) تبيان أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان :

لدينا : $\dfrac{z_D-z_A}{z_C-z_B}=\dfrac{\overline{z_C}-z_A}{i\,z_A-\overline{z_A}}=\dfrac{-i\,\overline{z_A}-z_A}{i\,z_A+i^2\,\overline{z_A}}=\dfrac{-\left(z_A+i\overline{z_A}\right)}{i\left(z_A+i\overline{z_A}\right)}=-\dfrac{1}{i}=i$

ومنه : $\arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_C-z_B}\right)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}$ يعني $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

وبالتالي: المستقيمان (AD) و (BC) متعامدان

6) تعيين نسبة وزاوية التشابه S:

لدينا : العبارة المركبة للتشابه S من الشكل : $z'=az+b$

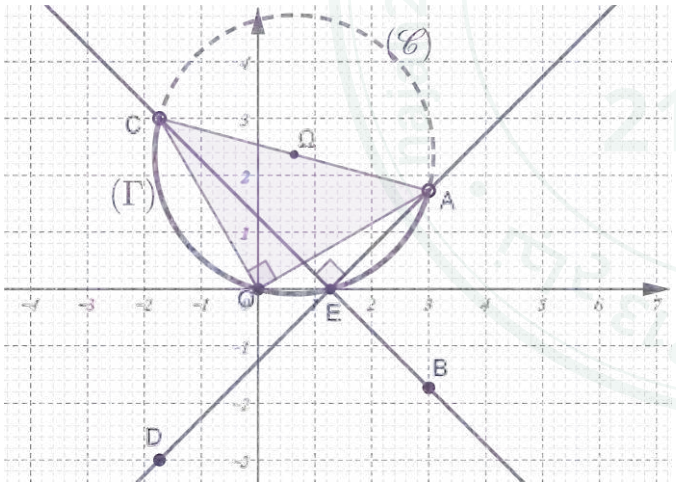
ولدينا : $\begin{cases}S(A)=C\\S(E)=E\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}z_C=a\,z_A+b\\z_E=a\,z_E+b\end{cases}$ وبالتالي

$$a=\frac{z_C-z_E}{z_A-z_E}=\frac{-\sqrt{3}+3i-3+\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}-3+\sqrt{3}}=\frac{3i-3}{i\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)}\times\frac{1-i}{1-i}$$

ومنه : $a=\dfrac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)}\times\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2i=i\sqrt{3}$ إذن : $a=i\sqrt{3}$

نسبة التشابه S : $k=|a|=\left|i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$ وزاوية التشابه S : $\theta=\arg(a)=\dfrac{\pi}{2}$

إستنتاج أنّ النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$:



لدينا : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ و $\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ ومنه :

AEC و AOC مثلثان قائمان .

وبالتالي النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها Ω منتصف القطعة $[AC]$ ونصف قطرها

$$r=O\Omega=|z_\Omega|=\left|\frac{z_C+z_A}{2}\right|=\left|\frac{iz_A+z_A}{2}\right|$$

$$r=\frac{\left|z_A(1+i)\right|}{2}=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$$

حل التمرين الثالث عشر:

1) الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)\left(z^2-4z+8\right)=0$:

$(z-4)\left(z^2-4z+8\right)=0$ تكافئ $z-4=0$ أو $z^2-4z+8=0$

$z-4=0$ يعني $z=4$

حل المعادلة $z^2-4z+8=0$:

حساب المميز : $\Delta=(-4)^2-4\times 8=16-32=-16=(4i)^2$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

المعادلة تقبل حلين متمايزين هما :

$$z_1 = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$$

$$z_2 = 2+2i$$

مجموعة حلول المعادلة : $S = \{4; 2-2i; 2+2i\}$

2) لدينا $z_A = 2-2i$ ، $z_B = 4$ ، $z_C = \overline{z_A}$ ، $z_D = -z_A$ و $z_E = -6-2i$

أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي:

لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+2i-2+2i}{4-2+2i} = \frac{4i}{2+2i} \times \frac{2-2i}{2-2i} = \frac{8i+8}{8} = 1+i$

أي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1+i$

ومنه $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

إستنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S:

لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$

وبالتالي النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ونسبته $k = \sqrt{2}$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$

ب) التحقق أنّ النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$:

لدينا : $1-2+2 = 1 \neq 0$ ومنه مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$ موجود

لاحقته هي $\frac{z_A - 2z_B + 2z_C}{1-2+2} = \frac{2-2i-8+4+4i}{1} = -2+2i = z_D$

ومنه D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$

ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z+4| = 8$

التحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ):

$A \in (\Gamma)$ يعني $|(1+i)z_A + 4| = 8$

لدينا : $|(1+i)z_A + 4| = |(1+i)(2-2i)+4| = |4+4| = |8| = 8$ ومنه $A \in (\Gamma)$

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميّزة:

لدينا : $|(1+i)z+4| = 8$ يكافئ $\left|(1+i)\left(z + \frac{4}{1+i}\right)\right| = 8$

أي $|1+i| \times \left|z + \frac{4}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right| = 8$ ومنه $\sqrt{2} \times |z+2-2i| = 8$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

إذن $\left|z-(-2+2i)\right|=\dfrac{8}{\sqrt{2}}$ وبالتالي $\left|z-z_D\right|=4\sqrt{2}$

أي $DM=4\sqrt{2}$ ومنه (Γ) هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها $R=4\sqrt{2}$

د) التحقق أنّ $S(D)=E$:

لدينا : $\dfrac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=\dfrac{-6-2i-2+2i}{-2+2i-2+2i}=\dfrac{-8}{-4+4i}=\dfrac{-8(-4-4i)}{(-4+4i)(-4-4i)}=\dfrac{32(1+i)}{16+16}$

ومنه $\dfrac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

وبالتالي : $S(D)=E$

تبيان أنّ الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S:

(Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها $AD=R=4\sqrt{2}$

صورتها هي الدائرة (Γ') التي مركزها $E=S(D)$ ونصف قطرها $R'=\sqrt{2}AD=AE$ لأنّ

$\dfrac{AE}{AD}=\sqrt{2}$

هذا العمل يبقى عمل بشري و احتمال السهو فيه وارد فرجاء اذا كان هناك استفسار تواصل معي على :



الموقع الأول لتحضير الفروض والاختبارات في الجزائر

القسم التحضيري	
السنة الأولى ابتدائي	
السنة الثانية ابتدائي	
السنة الثالثة ابتدائي	
السنة الرابعة ابتدائي	
السنة الخامسة ابتدائي	
شهادة التعليم الابتدائي	
السنة الأولى متوسط	
السنة الثانية متوسط	
السنة الثالثة متوسط	
السنة الرابعة متوسط	
شهادة التعليم المتوسط	
السنة الأولى ثانوي	
السنة الثانية ثانوي	
السنة الثالثة ثانوي	
شهادة البكالوريا	