najah213.com · نجاح 213

امتحان تجريبي في الرياضيات — شعبة العلوم التجريبية — الأستاذ ساعد

المدة : 3 ساعات ونصف — التاريخ : 6ماي2016

# اختر أحد الموضوعين التاليين

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: ( 04 نقاط)

**I.** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0$$

**II.** نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

النقط $A, B, C$ لواحقها على الترتيب $z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$.

**1-** أ) بين أن : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب) عين طبيعة المثلث $ABC$.

ج) عين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث $ABC$. أرسم $(\mathcal{C})$.

**2-** أ) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ و التي تحقق $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$.

ب) تحقق أن النقطتين $A$ و $B$ تنتميان إلى $(\Gamma)$.

**3-** ليكن $R$ الدوران الذي مركزه النقطة $A$ وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

أ) عين صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ .

ب) عين $z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالدوران $R$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج) عين صورة المجموعة $(\Gamma)$ بالدوران $R$.

### التمرين الثاني :( 05نقاط )

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط

$C(5;4;-3), B(3;2;-4), A(1;4;-5)$

$D(-2;8;4)$ و الشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$.

**1)** بيّن أن $x-2z-11=0$ معادلة للمستوي $(ABC)$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

**2)** أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(T)$ المار من النقطة D والموازي للشعاع $\vec{u}$.

**3)** ليكن $(P)$ المستوي ذي المعادلة $x-y-z=7$.

أ) بين المستويين $(ABC)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق المستقيم $(\Delta)$ المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$ ; $(t\in\mathbb{R})$

ب) أثبت أن $(T)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي.

**4)** تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$. تحقق أن النقطة E تنتمي إلى $(\Delta)$ و أن F تنتمي إلى $(T)$.

**5)** لتكن $(S)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث، $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

أ) جد بدلالة $\alpha$ معادلة ديكارتية للمجموعة $(S)$ و استنتج أن $(S)$ مستو يطلب تعيين شعاع ناظمي له.

ب) عين قيمة $\alpha$ حتى يكون $(S)$ المستوي المحوري للقطعة $[FE]$.

## التمرين الثالث ( 04 نقاط)

$(u_n)$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$$

1ـ أحسب $u_1, u_2, u_3$.

2ـ ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\le n+3$.

ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

3ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-n$.

أ) برهن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4ـ نضع : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k$ و $T_n=\frac{S_n}{n^2}$

- أحسب بدلالة n المجموع $S_n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ .

## التمرين الرابع ( 07 نقاط)

**I.** نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+(1-x)e^{-x+2}$ .

**1)** أدرس تغيرات الدالة g .

**2)** استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)\geq 0$ .

**II.** نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-1+xe^{-x+2}$ .

نسمي $(C_f)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1ـ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2ـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا .

4ـ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x-1$ .

5ـ أ) بين أن $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$.

ب) بين ان المنحنى $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها $x_0$ حيث $0<x_0<0.2$ .

ج) بين المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

د) أحسب f(-1) ثم أرسم $(T)$، $(\Delta)$ و $(C_f)$.

6ـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): xe^{-x+2}-1-m=0$ .

7ـ نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ :

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2-x-(1+x)e^{-x+2}+3$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير .

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول ( 05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ و المستوي $(P): x+y+z-3=0$

1) برهن أن المثلث ABC قائم .

2) برهن أن المستوي $(P)$ عمودي على المستقيم $(AB)$ ويمر من النقطة A .

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P')$ المستوي العمودي على $(AC)$ و المار من النقطة A .

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ مستقيم تقاطع كلا من المستويين $(P)$ و $(P')$.

5) أ) نعتبر النقطة $D(0;4;-1)$ . بين أن المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه ABCD .

ج) بين أن قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}$ rad .

د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي $(BDC)$.

## التمرين الثاني :( 04 نقاط)

نعتبر العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ حيث ، $z_1 = 3+i\sqrt{3}$ و $z_2 = -\sqrt{3}+3i$ .

**1)** أكتب العددين $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي .

**2)** في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B,A و E التي لواحقها

$z_1$ ، $z_2$ و $z_3 = z_1 + z_2$ على الترتيب .

أ) برهن أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين .

ب) استنتج أن الرباعي OAEB مربع .

**3)** أ) بين أن : $OE = 2\sqrt{6}$ و أن $(\vec{u};\overrightarrow{OE}) = \frac{5\pi}{12}$.

ب) عين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$ .

ج) أحسب $z_3^{2016}$ .

د) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا .

## التمرين الثالث :( 04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ .

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة .

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$ .

ب) أحسب عبارة $v_n$ بدلالة n ثم استنتج أن $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ .

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

## التمرين الرابع :( 07 نقاط)

- **الجزء الأول :**

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-2\ln x$ .

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2- استنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجال $]0;+\infty[$ .

- **الجزء الثاني :**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)$$

نسمي $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$ .

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2- أ) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=1-x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ .

ج) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث ، $0.41<\alpha<0.42$.

د) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

د) أرسم $(\Delta)$، $(T)$ و $(C_f)$.

3ـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x)=m-x$ .

تمنياتي لكم جميعا بالتوفيق

والنجاح في البكالوريا



najah213.com · نجاح 213

# تصحيح الإمتحان التجريبي ماي 2016 شعبة : علوم تجريبية

## تصحيح الموضوع الاول

### التمرين الأول :

**I. حل المعادلة $(E):(z-2)(z^2+2z+4)=0$ :**

$(z-2)(z^2+2z+4)=0$ يكافئ $z-2=0$ أو $z^2+2z+4=0$

$z-2=0$ معناه $z=2$

- حل المعادلة $(*)\ldots z^2+2z+4=0$

- حساب المميز : $\Delta=2^2-4\times1\times4=4-16=-12$

نضع $\Delta=12i^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$

- المعادلة $(*)$ تقبل حلين مركبين متمايزين هما :

$z_1=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_2=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$

مجموعة حلول المعادلة $(E)$ هي $S=\left\{2,-1+i\sqrt{3},-1-i\sqrt{3}\right\}$

**II.** لدينا : $z_A=-1+i\sqrt{3}$ , $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$

**1- أ) تبيان أن : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$**

- لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\dfrac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}$

- ومنه $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{9+6i\sqrt{3}-3}{12}=\dfrac{6}{12}+i\dfrac{6\sqrt{3}}{12}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- أي $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ لان :

$$\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$Arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

**ب) تعيين طبيعة المثلث $ABC$ :**

- لدينا : $\left|\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=1$ ومنه $\dfrac{CB}{CA}=1$ أي $CB=CA$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

ولدينا : $Arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ أي $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ومنه $ABC$ مثلث متقايس الأضلاع.

**ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث $ABC$ :**

- لدينا : $|z_A|=2=OA$ ، $|z_B|=2=OB$ و $|z_C|=2=OC$

وبالتالي : $OA=OB=OC=2$ أي النقط $B,A$ و $C$ تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $r=2$

2- **أ) تعيين طبيعة $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق:**

$$2\left(z+\bar{z}\right)+z\bar{z}=0$$

$2\left(z+\bar{z}\right)+z\bar{z}=0$ معناه $2(x+iy+x-iy)+x^2+y^2=0$

ومنه $x^2+y^2+4x=0$ وبالتالي : $(x+2)^2+y^2=4$

أي أن $(\Gamma)$ هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(-2;0)$ ونصف قطرها $r=2$.

**ب) التحقق من أن $A$ و $B$ تنتميان إلى $(\Gamma)$:**

- لدينا : $\Omega A=|z_A-z_\Omega|=|-1+i\sqrt{3}+2|=|1+i\sqrt{3}|=2=r$

- ولدينا : $\Omega B=|z_B-z_\Omega|=|-1-i\sqrt{3}+2|=|1-i\sqrt{3}|=2=r$

وبالتالي $A$ و $B$ تنتميان إلى $(\Gamma)$.

3- لدينا $R$ دوران مركزه النقطة $A$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

**أ) تعيين صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ :**

- لدينا : $R(B)=B'$ معناه $z_{B'}=az_B+b$

- ولدينا : $a=cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}$ أي $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- ولدينا كذلك : $b=(1-a)z_A=\left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)=1+i\sqrt{3}$

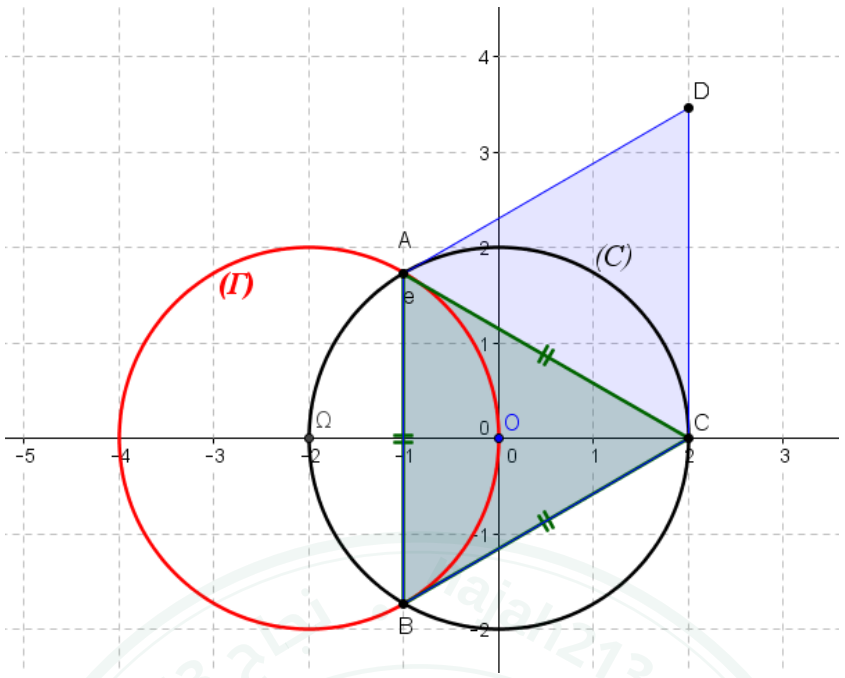
- إذن : $z_{B'}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=2=z_C$

ومنه $R(B)=C$

**أ) تعيين $z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالدوران $R$ :**

$$z_D=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C+1+i\sqrt{3}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 2+1+i\sqrt{3}=2+2i\sqrt{3}$$

أي $z_D=2+2i\sqrt{3}$




• **استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$ :**

الرباعي $ABCD$ معين لأن :

• $ABCD$ متوازي أضلاع لأن : $z_{\overrightarrow{AB}} = -1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$ و

$z_{\overrightarrow{DC}} = 2+2i\sqrt{3}-2 = 2i\sqrt{3}$

أي $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} = 2i\sqrt{3}$

ولدينا : $BC = CD$ لأن $R(B) = C$ و $R(C) = D$

ج) **صورة $(\Gamma)$ بالدوران $R$ :**

هي $(\mathcal{C})$ لأن $R(\Omega) = O$ و $R(B) = C$

**التمرين الثاني :**

$A(1;4;-5), B(3;2;-4), C(5;4;-3), D(-2;8;4)$ و $\vec{u}(1;5;-1)$

**1) تبيان أن $x-2z-11=0$ معادلة للمستوي $(ABC)$:**

نعوض بإحداثيات النقط $A, B, C$ في المعادلة السابقة نجد :

$$\begin{cases} 1-2(-5)-11 = 11-11 = 0 \\ 3-2(-4)-11 = 11-11 = 0 \\ 5-2(-3)-11 = 11-11 = 0 \end{cases}$$

ومنه $x-2z-11=0$ معادلة للمستوي $(ABC)$

**2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم $(T)$ المار من النقطة $D$ والموازي للشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$:**

- أي $\vec{u}(1;5;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(T)$.

$$(T):\begin{cases}x=t-2\\y=5t+8\\y=-t+4\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$$

3) لدينا : $(P):x-y-z=7$

**أ) تبيان أن المستويين $(ABC)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق المستقيم**

$$(\Delta):\begin{cases}x=11+2t\\y=4+t\\z=t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

- نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$ في معادلة $(ABC)$ نجد : $11+2t-2t-11=0$ ومنه $0t=0$.
- نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$ في معادلة $(P)$ نجد : $11+2t-4-t-t-7=0$ أي $0t=0$

وبالتالي $(\Delta)$ محتوى في كل المستويين $(ABC)$ و $(P)$ فهما إذن متقاطعان وفق المستقيم $(\Delta)$.

**ب) اثبات أن $(T)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي :**

- لدينا : $\frac{1}{1}\neq\frac{5}{-1}\neq\frac{-1}{-1}$ وبالتالي $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا أي أن $(T)$ و $(\Delta)$ غير متوازيين. فهما إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

نحل الجملة $\begin{cases}11+2t=t'-2\ldots(1)\\4+t=5t'+8\ldots(2)\\t=-t'+4\ldots(3)\end{cases}$ فنجد $\begin{cases}t=4\\t'=0\end{cases}$

بالتعويض في المعادلة $(1)$ نجد : $11+2(4)=0-2$ ( مستحيلة ) ومنه $(T)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي .

4) لدينا : $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$.

- **التحقق من أن $E\in(\Delta)$ :**

نعوض بإحداثيات النقطة $E$ في جملة التمثيل الوسيطي لـ $(\Delta)$ نجد :

$$\begin{cases}3=11+2t\\0=4+t\\t=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-4\\t=-4\\t=-4\end{cases}$$

ومنه $E \in (\Delta)$

- **التحقق من أن $F \in (T)$ :**

نعوض بإحداثيات النقطة $F$ في جملة التمثيل الوسيطي لـ $(T)$ نجد :

$$\begin{cases} -3 = t - 2 \\ 3 = 5t + 8 \\ 5 = -t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

ومنه $F \in (T)$

**5)** لدينا : $(S) : \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE} = \alpha (\alpha \in \mathbb{R})$

**أ) تعيين معادلة ديكارتية للمجموعة $(S)$ بدلالة $\alpha$**

- لدينا : $\overrightarrow{ME}(3-x;-y;-4-z)$ و $\overrightarrow{FE}(6;-3;-9)$

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE} = \alpha$ معناه $6(3-x)-3(-y)-9(-4-z) = \alpha$

أي $18-6x+3y+36+9z = \alpha$ ومنه $-6x+3y+9z+54-\alpha = 0$

طبيعة المجموعة $(S)$ : هي مستو شعاع ناظمي له $\vec{n}(-6;3;9)$

**ب) تعيين قيمة $\alpha$ بحيث يكون $(S)$ المستوي المحوري للقطعة $[FE]$ :**

- لدينا $(S)$ المستوي المحوري للقطعة $[FE]$ معناه $(S)$ يمر من منتصف $[FE]$

وليكن $I$

$$x_I = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$$

- إذن $y_I = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$

$$z_I = \frac{z_E + z_F}{2} = \frac{-4+5}{2} = \frac{1}{2}$$

- بالتعويض في المعادلة السابقة نجد : $-6\times 0 + 3\times\frac{3}{2} + 9\times\frac{1}{2} + 54 - \alpha = 0$

أي $9 + 54 - \alpha = 0$ وبالتالي $\alpha = 63$

## التمرين الثالث

- لدينا : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

**1- حساب $u_1, u_2, u_3$:**

$$u_1 = \frac{7}{3} \; ; \; u_2 = \frac{26}{9} \; ; \; u_3 = \frac{97}{27}$$

**2- أ) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n \leq n + 3$**

- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

**1)** من أجل $n = 0$ لدينا :

$u_0 = 2$ وبالتالي $u_0 \le 3$ ومنه $P(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$.

**2)** نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $u_n \le n+3$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن : $u_{n+1} \le n+4$

- لدينا : $u_n \le n+3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n \le \frac{2}{3}(n+3)$ إذن $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \le \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1$

وبالتالي : $u_{n+1} \le \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$ أي $u_{n+1} \le n+3$ ومنه $u_{n+1} \le n+3 \le n+4$

إذن $u_{n+1} \le n+4$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$.

**ب) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$**

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = \frac{1}{3}(2u_n + n + 3 - 3u_n) = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$$

- **استنتاج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$:**

- لدينا : $u_n \le n+3$ ومنه $n+3-u_n \ge 0$ أي $\frac{1}{3}(n+3-u_n) \ge 0$

وبالتالي $u_{n+1} - u_n \ge 0$ ومنه $(u_n)$ متزايدة.

**3-** لدينا : $v_n = u_n - n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

**أ) البرهان على أن المتتالية $(v_n)$ هندسية:**

- لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}(u_n - n)$

أي $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ومنه $(v_n)$ هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 0 = 2$

**ب) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$**

- لدينا : $u_n = v_n + n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right] = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

لدينا : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

**4) حساب $S_n$ بدلالة $n$:**

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + (1+2+\ldots+n) = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{n}{2}(1+n)$$

وبالتالي $S_n = 2 \times \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} = 2 \times 3\left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$

ومنه $S_n = 6 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{n^2} - \frac{4}{n^2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\times\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

## التمرين الرابع

### 1) دراسة تغيرات الدالة $g$ :

- **حساب النهايات :**

- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+(1-x)e^{-x+2}\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+2} = +\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+(1-x)e^{-x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^2\times e^{-x} - e^2\times xe^{-x}\right) = 1$

- **حساب المشتقة :**

$$g'(x) = -e^{-x+2} - (1-x)e^{-x+1} = (x-2)e^{-x+2}$$

- **جدول التغيرات**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ |

**استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $g(x) \geq 0$ :**

- من أجل $x \in \mathbb{R}$ فان $g(x) \in [0;+\infty[$ ومنه $g(x) \geq 0$

لدينا : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$

**1ـ حساب النهايات :**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right) = -\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x+2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty\end{cases}$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right)=+\infty$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}\times\dfrac{1}{e^{2}}=0\end{cases}$$

**2ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا : $f'(x)=g(x)$**

- **لدينا :** $f'(x)=1+e^{-x+2}-xe^{-x+2}=1+(1-x)e^{-x+2}=g(x)$

**ومنه** $f'(x)=g(x)$

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :** إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |

- **جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**3ـحساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}-x+1\right)=\lim_{x\to+\infty} xe^{-x+2}=0$$

- **التفسير الهندسي :**

المستقيم ذي المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

**4ـدراسة الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta): y=x-1$**

- **ندرس إشارة الفرق** $f(x)-y$ :

- **لدينا :** $f(x)-y=xe^{-x+2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

**5أ) تبيان أن النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني $(C_f)$:**

- لدينا : $f''(x)=g'(x)=(x-2)e^{-x+2}$
- جدول إشارة $f''(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

المشتقة الثانية $f''$ تنعدم من
أجل $x=2$ مغيرة إشارتها أي النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$.

**ب) تبيان أن المنحنى $(C_f)$ في نقطة فاصلتها $0<x_0<0.2$ :**

- الدالة $f$ مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0;0.2]$ ولدينا :

- $f(0)=-1$ و $f(0.2)=0.2-1+0.2\times e^{-0.2+2}=-0.8+1.21=0.41$
ومنه $f(0)\times f(0.2)<0$

- حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ حيث $0<x_0<0.2$

أي $(C_f)$ **يقطع** $(x'x)$ في النقطة $(x_0;0)$ حيث $0<x_0<0.2$

**ج) تبيان أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ :**

$(T)$ يوازي $(\Delta)$ معناه معامل توجيه المماس $(T)$ يساوي 1
أي $f'(1)=1$ ومنه $g(x)=1$ وبالتالي : $1+(1-x)e^{-x+2}=1$
إذن : $(1-x)e^{-x+2}=0$ ومنه $1-x=0$ أي $x=1$

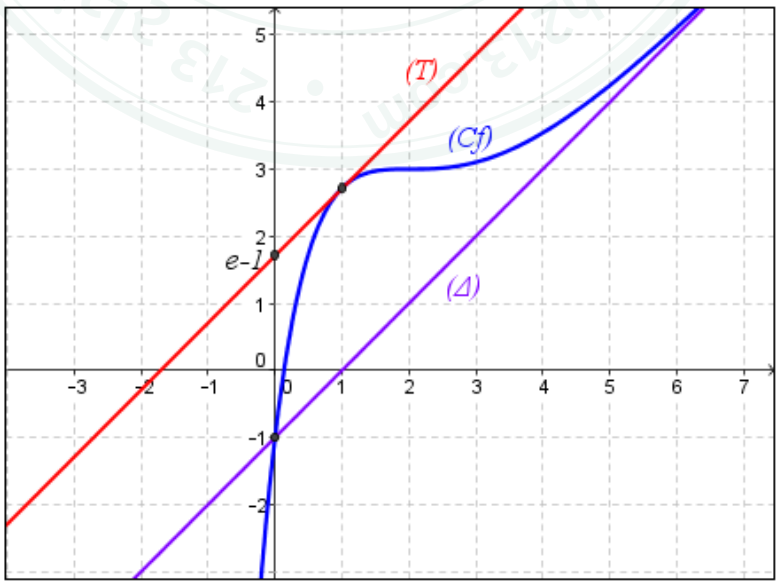
- **كتابة معادلة ديكارتية للمماس $(T)$ :**

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=1\times(x-1)+e=x-1+e$ أي $(T):y=x-1+e$

**د) حساب $f(-1)$ :**

$f(-1)=-1-1-e^{3}=-2-e^{-3}=-22.09$

**الرسم :**



**6ـ المناقشة البيانية لحلول المعادلة** $(E): xe^{-x+2}-1-m=0$

$xe^{-x+2}-1-m=0$ معناه $xe^{-x+2}-1=m$

ومنه $x-1+xe^{-x+2}=x+m$ أي $f(x)=x+m$

- إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من $(\Delta)$ و $(T)$
- إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $m=-1$ المعادلة تقبل حلا معدوما .
- إذا كان $m\in]-1;e-1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان $m=e-1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 1.

إذا كان $m\in]e-1;+\infty[$ فان المعادلة ليس لها حل .

**7ـ تبيان أن الدالة $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير :**

- لدينا : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-x-(1+x)e^{-x+2}+3$

ومن $F'(x)=x-1-\left[e^{-x+2}+(1+x)\left(-e^{-x+2}\right)\right]=x-1-(1-1-x)e^{-x+2}$

$=x-1+xe^{-x+2}$

أي $F'(x)=f(x)$

- ولدينا : $F(3)=\frac{1}{2}\times 2^2-2-(1+2)e^{-2+2}+3=2-2-3e^0+3=-3+3=0$

وبالتالي $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير.

najah213.com · نجاح 213

# تصحيح الموضوع الثاني

## التمرين الأول :

لدينا : $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$

**1) البرهان على أن المثلث $ABC$ قائم :**

- لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$

ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$ ومنه المثلث $ABC$ قائم في النقطة $A$ .

**2) البرهان على أن المستوي $(P)$ عمودي على المستقيم $(AB)$ ويمر من النقطة $A$ :**

- لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$
- إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$
- نعوض بإحداثيات النقطة $A$ في معادلة $(P)$ نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$

وبالتالي : المستوي $(P)$ عمودي على المستقيم $(AB)$ ويمر من النقطة $A$

**3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(P')$ العمودي على المستقيم $(AC)$ والمار من النقطة $A$ :**

لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P')$ وبالتالي معادلة للمستوي $(P')$ من الشكل : $3x-3z+d=0$

- تعيين قيمة $d$ نعوض بإحداثيات النقطة $A$ نجد :

$3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$

وبالتالي معادلة للمستوي $(P')$ : $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$

**4) كتابة تمثيل وسيطي لـ $(\Delta)$ مستقيم تقاطع المستويين $(P)$ و $(P')$ :**

- لدينا : $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-z-1=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ وبالتالي

$\begin{cases}z+1+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}x=z+1\\y=-2z+2\end{cases}$

نضع : $z=t$ وبالتالي : $(t\in\mathbb{R})$ ؛ $(\Delta):\begin{cases}x=t+1\\y=-2t+2\\z=t\end{cases}$

**5) أ) تبيان أن المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$**

- لدينا : $D(0;4;-1)$ وبالتالي $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$

**وبالتالي المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$**

**ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$ :**

$$v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$$

- لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و

$$AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$

أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}=27uv$ $\qquad v_{ABCD}=27uv$

**ج) تبيان أن قيس الزاوية $BDC$ هو $\frac{\pi}{4}rad$ :**

- لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$

وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times 6-3(-6)+6\times 0=36+18=54$

- ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$

أي $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ $\quad cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)=\frac{54}{9\times 6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $BDC=45^\circ$

**د) حساب مساحة المثلث $BDC$ :**

- $S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times sin\,BDC=\frac{1}{2}\times 9\times 6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$

**- استنتاج المسافة بين النقطة $A$ والمستوي $(BDC)$ :**

لدينا : $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d\left(A,(BCD)\right)=\frac{1}{3}\times 27\times d\left(A,(BCD)\right)=27$

ومنه $d\left(A,(BDC)\right)=\frac{27}{\frac{1}{3}\times 27}=3$ $\qquad d\left(A,(BDC)\right)=3$

**التمرين الثاني :**

- لدينا : $z_1=3+i\sqrt{3}$ و $z_2=-\sqrt{3}+3i$

**1) كتابة العددين $z_2,z_1$ على الشكل الأسي :**

- لدينا : $|z_1|=\sqrt{(3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

- نضع : $\theta_1 = Arg(z_1)$ إذن $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

وبالتالي : $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

- لدينا : $|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- نضع : $\theta_2 = Arg(z_2)$ إذن $\begin{cases} \cos\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه

$$\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

وبالتالي : $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) لدينا : $z_3 = z_1 + z_2$

**أ) البرهان على أن المثلث $OAB$ قائم ومتساوي الساقين :**

- لدينا : $\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

- ومنه $\dfrac{OB}{OA} = 1$ أي $OB = OA$ و $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

أي أن المثلث $OAB$ قائم ومتساوي الساقين.

**ب) استنتاج أن الرباعي $OAEB$ مربع :**

- لدينا :

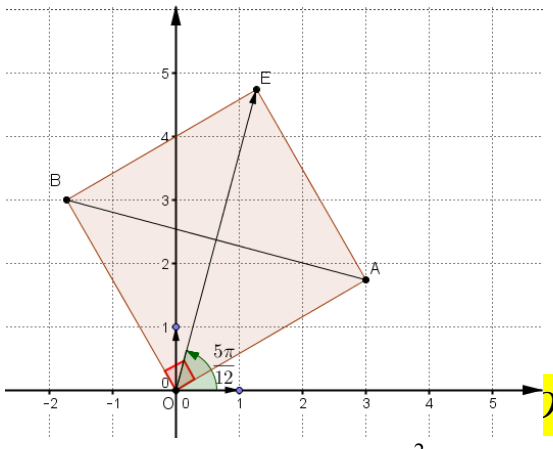
$z_{\overrightarrow{OB}} = z_2$ و $z_{\overrightarrow{AE}} = z_1 + z_2 - z_1 = z_2$

أي أن $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$

ومنه الرباعي $OAEB$ متوازي أضلاع .

- ولدينا : $OAB$ مثلث قائم ومتساوي الساقين

وبالتالي $OAEB$ مربع .




3) أ) تبيان أن $OE = 2\sqrt{6}$

- لدينا : $OE^2 = OA^2 + AE^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12 + 12 = 24$

ومنه $OE = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

- تبيان أن $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) = \frac{5\pi}{12}$ :

- لدينا : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right)$

ومنه $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + 3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

ب) تعيين القيمتين المضبوطتين لكل من $cos\frac{5\pi}{12}$ و $sin\frac{5\pi}{12}$ :

لدينا : $z_3 = z_1 + z_2 = 3 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3i = \left(3 - \sqrt{3}\right) + i\left(3 + \sqrt{3}\right)$

- ولدينا : $z_3 = 2\sqrt{6}\left(cos\frac{5\pi}{12} + i\,sin\frac{5\pi}{12}\right)$

بالمطابقة نجد :

$$cos\frac{5\pi}{12} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

و $$sin\frac{5\pi}{12} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

ج) حساب $z_3^{2016}$ :

$$z_3^{2016} = \left(2\sqrt{6}\right)^{2016}\left(cos\frac{2016\times 5\pi}{12} + i\,sin\frac{2016\times 5\pi}{12}\right)$$

$$= \left(2\sqrt{6}\right)^{2016}\left(cos\,840\pi + i\,sin\,840\pi\right)$$

أي $z_3^{2016} = \left(2\sqrt{6}\right)^{2016}$

**د) تعيين قيم العدد الطبيعي** $n$ **بحيث يكون ،** $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ **حقيقيا :**

$\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا معناه $\left(cos\frac{5n\pi}{12}+i\,sin\frac{5n\pi}{12}\right)$ حقيقيا

ومنه $sin\frac{5n\pi}{12}=0$ وبالتالي $\frac{5n\pi}{12}=k\pi$ أي $5n\pi=12k\pi$

إذن $5n=12k$ ومنه $n=12\left(\frac{k}{5}\right)$ وبالتالي $n=12k'\left(k'\in\mathbb{N}\right)$

**التمرين الثالث:**

- لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

**1ـ التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي** $n$ ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

**2ـ أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي** $n$ ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$

اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

نبرهن أن : $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ .

- لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$

وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$

وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$.

**ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي** $n$ ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ .

- **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :**

ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

ولدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$

وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\frac{1}{2}$

- ولدينا : $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$

أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.

ج) **دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$.

**تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$

3ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) **اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :**

- لدينا : $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

$$v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{3\times3^n\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\frac{\frac{6\times3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$$

أي $v_{n+1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$ وحدها الأول $v_0=\frac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\frac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{1}{3}$

**ب) حساب عبارة الحد العام $v_n$ بدلالة $n$ :**

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

- لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times 6^n$
- **استنتاج أن :** $u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$ ومنه $2u_n v_n - v_n = 3^n u_n$ أي $2u_n v_n - 3^n u_n = v_n$

- ومنه $\left(2v_n - 3^n\right)u_n = v_n$ وبالتالي : $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$

إذن: $u_n = \frac{-\frac{1}{3} \times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3} \times 6^n\right) - 3^n} = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n}$

ومنه $u_n = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n} = \frac{2^n \times 3^n}{2 \times 3^n \times 2^n + 3 \times 3^n}$ أي $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3} = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$$

**التمرين الرابع:**

- **الجزء الأول :**
- لدينا : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

**1- دراسة تغيرات الدالة $g$ :**

- **حساب النهايات :**

- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^2 - 2\ln x\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 2\ln x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 - 2\frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

- **حساب المشتقة :**

$$g'(x) = 2x - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2-2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

- **دراسة إشارة المشتقة :**

| $x$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $0$ |
| $g'(x)$ | $\|\|$ | $-$ $0$ | $+$ | |

- **جدول التغيرات :**

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|

| | |
|---|---|
| | $0$ |
| $g'(x)$ | $0$ $\quad +$ <br> $\quad -$ |
| $g(x)$ | $+\infty$ <br> $+\infty$ <br> $1$ |

**2- استنتاج إشارة $g(x)$ :**

| | |
|---|---|
| $x$ | $+\infty$ <br> $0$ |
| $g(x)$ | $+$ |

- **الجزء الثاني :**

- لدينا : $f(x)=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)$

**1ـ أ) حساب النهايات :**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}(1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)=-\infty\end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty\end{cases}$

**ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$ :**

- **لدينا :** $f'(x)=-1-2\left[-\frac{1}{x^2}(1+\ln x)+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}\right]=-1-2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)$

**اي** $f'(x)=\frac{-x^2+2\ln x}{x^2}=-\frac{g(x)}{x^2}$

**ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :** بما أن $g(x)>0$ فإن $f'(x)<0$

| $x$ | $+\infty$ <br> $0$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ $-$ |

- **جدول تغيرات الدالة $f$ :**

| $x$ | $+\infty$ <br> $0$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ $-$ |
| $f(x)$ | $\|\|$ $+\infty$ ↘ $-\infty$ |

**2ـ أ) تبيان أن المستقيم $(\Delta): y=1-x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ :**

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)-1+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)$$

$$\text{إذن } \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

ومنه المستقيم $(\Delta)$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

**ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ :**

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

$$f(x)-y=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)-1+x=-\frac{2}{x}(1+\ln x)$$

- **جدول إشارة الفرق :**

$f(x)-y=0$ معناه $-\frac{2}{x}(1+\ln x)=0$

ومنه $1+\ln x=0$ أي $\ln x=-1$ وبالتالي $x=e^{-1}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $e^{-1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $0$ | | | |
| $1+\ln x$ | | $0$ | $+$ | | |
| | | | | | $-$ |
| $f(x)-y$ | | $0$ | $-$ | | |
| | | | | | $+$ |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

**ج) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0.41<\alpha<0.42$:**

- لدينا $f$ مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.41;0.42]$
- ولدينا: $f(0.41)=1-0.41-\frac{2}{0.41}(1+\ln 0.41)=0.06$

و $f(0.42)=1-0.42-\frac{2}{0.42}(1+\ln 0.42)=-0.05$

أي أن $f(0.41)\times f(0.42)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0.41<\alpha<0.42$

**د) تبيان أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي $(\Delta)$:**

- $(T)$ يوازي $(\Delta)$ معناه معامل توجيه $(T)$ يساوي $-1$ أي $f'(x)=-1$

ومنه $-\frac{x^2-2\ln x}{x^2}=-1$ أي $x^2-2\ln x=x^2$

وبالتالي $-2\ln x=0$ إذن $\ln x=0$ ومنه $x=1$

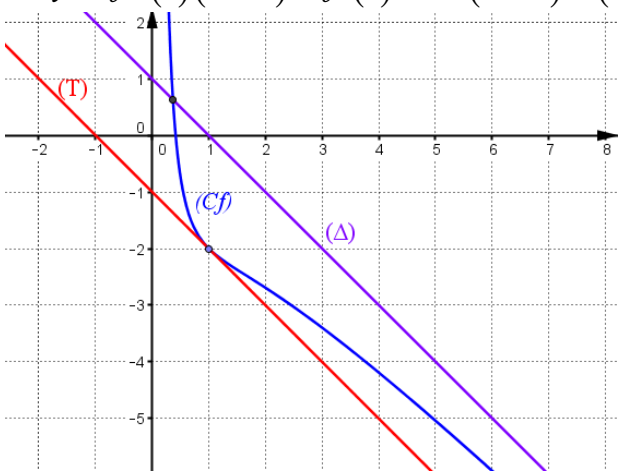
$(T)$ مماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$

- **كتابة معادلة ديكارتية للمماس $(T)$:**

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=-1(x-1)+(-2)=-x+1-2=-x-1$

أي $(T): y=-x-1$

- **الرسم:**



**4) المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x)=m-x(m\in\mathbb{R})$ :**

- حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=m-x$ الموازي لكل من $(T)$ و $(\Delta)$
- إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ المعادلة ليس لها حل .
- إذا كان $m=-1$ المعادلة تقبل حلا هو $x=1$ .
- إذا كان $m\in]-1;1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .

إذا كان $m\in[1;+\infty[$ المعادلة تقبل حلا موجبا .

قالت إمرأة لزوجها وهي ترفع من شأنها: أنت كالشاي وأنا كالبسكوتة فلا طعم للشاي بدون بسكوتة.... فرد بهدوء قائلا: احذري أن تذوبي في الشاي فتختفين ويبقى سلطان الشاي يبحث عن بسكوتة أخرى.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً