najah213.com · نجاح 213

المقدمة

أولا: إلى الذين قالوا ربنا الله ثم استقاموا.

ثانيا: إلى اللواتي حملننا وهنا على وهن أمهاتنا العزيزات.

ثالثا: إلى الذين أفنوا شبابهم لراحة بالنا وسعادتنا آباءنا الأعزاء.

رابعا: إلى أساتذتنا الذين منحونا أفضل العلم ووقفوا معنا لو إستطعنا لوضعناهم في قرص الشمس وأشرنا إلى الجميع بأنهم رفقاء دربنا وكما يقول المثل (من علمني حرفا كنت له عبدا).

خامسا: إلى إخواننا الأعزاء دون فرز أحد منهم.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الفهرس

المقدمة.....1
المقطع التعليمي الأول.....2
الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة (القسمة الإقليدية، التعرف على القاسم المشترك الأكبر وكيفية حسابه، العددان الأوليان فيما بينهما وكيفية إختزال كسر) 4
الحساب على الجذور والعمليات عليها.....17
المقطع التعليمي 2.....27
نظرية فيثاغورس وكيفية تطبيقها والبرهان عليها 28
مبرهنة طالس.....33
حساب المثلثات في المثلث القائم 34
المقطع التعليمي الثالث 44
النشر.....45
مخطط يوضح الفرق بين النشر والتحليل 46
المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد.....50
المقطع التعليمي الرابع 52
الانسحاب ومفهوم الشعاع 53
مركبتا شعاع.....57
المقطع التعليمي الخامس 65
الدالة التآلفية 65
جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين 67
الدوران 75
قائمة المصادر والمراجع 78

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

المقطع التعليمي 1: الأعداد الطبيعية و الأعداد الناطقة و الحساب على الجذور التربيعية

الموارد التعليمية:

1)- القسمة الإقليدية.

2)- التعرف على قاسم عدد طبيعي.

3)- قواسم عدد طبيعي.

4)- القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.

5)- تعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.

6)- البحث عن القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.

7)-العددان الأوّليان فيما بينهما.

8)- إختزال كسر.

9)- تمارين من شهادة التعليم المتوسط

10)- الجذر التربيعي لعدد موجب.

11)- الأعداد الناطقة والأعداد الغير ناطقة.

12)-المعادلات من الشكل: $x^2 = a$

13)- العمليات من الجذور التربيعية:

- ✓ جداء جذرين تربيعيين
- ✓ حاصل قسمة جذرين تربيعيين
- ✓ مجموع وفرق جذرين تربيعيين

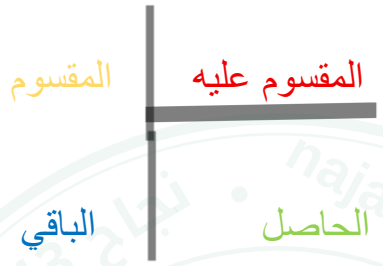
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

القسمة الإقليدية [1][1]:

القسمة الإقليدية لعدد طبيعي (يُسَمّى المقسوم) على عدد طبيعي غير معدوم يُسَمّى المقسوم عليه تعني إيجاد عددين طبيعيين يسميان الحاصل والباقي ويحققان المساواة التالية:

المقسوم = (الحاصل × المقسوم عليه) + الباقي

المقسوم عليه > الباقي



بحيث : المقسوم عليه > الباقي

ترميزات:

نرمز للمقسوم بالحرف اللاتيني a

نرمز للمقسوم عليه بالحرف اللاتيني b

نرمز للحاصل بالحرف اللاتيني q

نرمز للباقي بالحرف اللاتيني r

تصبح المساواة التي تعبر عن القسمة الإقليدية كالآتي:

$$a = b \times q + r$$

حيث: $r < b$

ملاحظة:

إذا كان r=0 فإننا نصطلح على إسم المقسوم عليه باسم القاسم.

المقسوم = (الحاصل × القاسم)

﴿أمثلة﴾

باقي القسمة الإقليدية للعدد 253على 25هو 3والحاصل هو 10 أي أنَّ:

[1]: تنسب القسمة الإقليدية إلى العالم الإغريقي الشهير إقليدس الذي عاش في القرن الثالث قبل الميلاد صاحب كتاب العناصر والذي يتكون من 13جزءا حيث نجد في الجزء السابع من كتابه المبرهنة المتعلقة بالقاسم المشترك الأكبر وآلية حسابه والتي تعرف اليوم بخوارزمية إقليدس حيث جمع إقليدس في هذا الكتاب كل نظريات ما قبله من العلماء الإغريق كفيثاغورس وأرخميدس وطالس وكذا استخدم منطق أرسطو في تحديده للبرهان الرياضي.

$$253 = 25 \times 10 + 3$$

253 | 25
3 | 10

حيث: $3 < 25$

2)- باقي القسمة الإقليدية للعدد 880على 7هو 5

$$880 = 7 \times 125 + 5$$

880 | 125
5 | 7

حيث: $5 < 125$

قواسم عدد طبيعي :

aوb عددان طبيعيان حيث: $b \neq 0$.

✓ القول أنّ b قاسم للعدد a معناه أنّ باقي القسمة الإقليدية للعدد aعلى b هو 0.

✓ القول أنّ b قاسم للعدد a معناه يوجد عدد طبيعي q حيث: $a = b \times q$

﴿ملاحظات﴾

☒ كل الجمل التالية لها نفس المعنى:

☒ b قاسم ل a

☒ b يقسم a

☒ a يقبل القسمة على b

☒ a مضاعف ل b

أمثلة:

$$100 = 25 \times 4$$

في هذه الحالة نقول بأنّ:

✓ العدد 25 قاسم للعدد 100.

✓ العدد 25 يقسم العدد 100.

✓ العدد 4 قاسم للعدد 100.

✓ العدد 4 يقسم العدد 100.

✓ 100 يقبل القسمة على 25.

✓ 100 يقبل القسمة على 4.

✓ 100 مضاعف للعدد 4.

✓ 100 مضاعف للعدد 25.

❖ قواسم عدد طبيعي:

نرمز لقواسم عدد طبيعي ب D_a

❖ **خواص قواسم عدد طبيعي:**

خاصية 01:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

a و b و n أعداد طبيعية غير معدومة.

- إذا كان n يقسم كلا من a و b فإن n يقسم $a+b$ و $a-b$.

البرهان الرياضي [1]:

لدينا من المعطيات n يقسم كلا من a و b وبالتالي يوجد عددان طبيعيان q و q' بحيث:

$$a = n \times q \quad \text{و} \quad b = n \times q'$$

$$a + b = n \times q + n \times q'$$

$$a + b = n(q + q')$$

$$a + b = n \times k \quad / \; k = (q + q')$$

حيث k عدد طبيعي .

إذن: n يقسم $a+b$.

$$a - b = n \times q - n \times q'$$

$$a - b = n(q - q')$$

$$a - b = n \times k' \quad / \quad k' = q - q'$$

حيث: k' عدد طبيعي.

إذن: n يقسم $a-b$.

خاصية 2:

a و b و n أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a > b$.

إذا كان n يقسم كلا من a و b فإن n يقسم باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b

البرهان الرياضي:

لدينا من المعطيات n يقسم كلا من a و b وبالتالي يوجد عددان طبيعيان q و q' بحيث:

$$a = n \times q \quad \text{و} \quad b = n \times q'$$

عند إجراء القسمة الإقليدية للعدد a على b نتحصل على المساواة التالية:

$$a = b \times m + r \quad \text{حيث: } m \text{ عدد طبيعي}$$

$$a - b \times m = r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

نعوض قيمتي كلا من a و b في المعادلة (1) فنجد:

$$n \times q - n \times q' \times m = r$$

$$r = n(q - q' \times m) \quad / \; k = q - q' \times m$$

حيث: k عدد طبيعي.

[1] البرهان الرياضي هو أكمل أشكال البرهان لأنّه إستنتاج مؤلف من يقينيات لإنتاج يقيني وينقسم إلى برهان التحليل وبرهان التركيب فبرهان التحليل هو الصعود من النتائج إلى المبادئ أي من القضية المراد إثباتها إلى قضية صادقة أبسط منها أما برهان التركيب فهو عكس التحليل هبوط من المبادئ إلى النتائج كالاستنتاج الرياضي

إذن: n يقسم r باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b

أمثلة:

✓ 9يقسم 90 ويقسم 900 إذن 9 يقسم (90 – 900) أي 9 يقسم 810.

و9 يقسم (900+90) أي أن 9 يقسم 990.

✓ 5 يقسم كلا من 90 و25 إذن 5 يقسم باقي القسمة الإقليدية للعدد 90 على 25 أي 5 يقسم 15.

90 | 25
15 | 3

قواعد قابلية القسمة على عدد طبيعي:

قابلية القسمة على 2:

✓ يقبل عدد طبيعي القسمة على 2:

إذا كان رقم آحاده 0,2,4,6,8 أي إذا كان العدد زوجيا

أمثلة:

الأعداد 20 ,34,2014 تقبل القسمة على 2.

العدد 48 يقبل القسمة على 2 لأن رقم آحاده 8 وهو رقم زوجي.

العدد 35 لا يقبل القسمة على 2 لأن رقم آحاده 5 وهو عدد ا ليس زوجيا .

قابلية القسمة على 5:

✓ يقبل عدد طبيعي القسمة على 5:

إذا كان رقم آحاده 0أو 5.

أمثلة:

العدد 20 يقبل القسمة على 5 لأن رقم آحاده 0.

العدد 36 لا يقبل القسمة على 5 لأن رقم آحاده يختلف عن 5و 0 (5 ≠ 6 و0 ≠ 6) .

قابلية القسمة على 3:

يقبل عدد طبيعي القسمة على 3

najah213.com · نجاح 213

إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3

أمثلة:

العدد 2019 يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه 12 (12=9+1+0+2) وكما نعلم بأن 12 يقبل القسمة على 3 ($12 = 3 \times 4$)

العدد 234 يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه 9 (9=4+3+2) و9 يقبل القسمة على 3.

قابلية القسمة على 9:

يقبل عدد طبيعي القسمة على 9

إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9

أمثلة:

189يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه 18 يقبل القسمة على 9

$(1 + 8 + 9 = 18)$ و $18 = 2 \times 9$

العدد 179 لا يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه 17 لا يقبل القسمة على 9

$(1 + 7 + 9 = 17)$ و $17 \neq 9k$

القواسم المشتركة لعددين طبيعيين

تعريف:

القواسم المشتركة لعددين طبيعيين a وb هي الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تقسم a وb في آن واحد

أمثلة:

6 و 3 و2 و1 قواسم مشتركة للعددين 12 و18 لأن:

$12 = 2 \times 6$ و $18 = 3 \times 6$ و $18 = 9 \times 2$ و $12 = 4 \times 3$

قواسم العدد 12 هي :1,2,3,4,6,12.

ونكتب: $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$

قواسم العدد 18 هي :1,2,3,6,9,18.

ونكتب: $D_{18} = \{1,2,3,6,9,18\}$

إذن القواسم المشتركة للعددين 12 و18 هي :1,2,3,6.

$D_{12 \cap 18} = \{1,2,3,6\}$

تعيين قواسم عدد طبيعي :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

للبحث عن قواسم عدد طبيعي a نقوم بالخطوات التالية:

نجري القسمة الإقليدية للعدد a على الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها أصغر من a أو يساويه، وفي حالات الباقي المعدوم فإن كلا من المقسوم عليه والناتج هما قاسمان للعدد a .

في حالة الأعداد 2,3,4,5,9 نطبق قواعد قابلية القسمة.

أمثلة:

1)- عين كل قواسم العدد 105

﴿الحل النموذجي﴾

لدينا 105 محصور بين 10^2 و 11^2 ومنه نختبر قابلية قسمة 105 على الأعداد من 1إلى 10.

نجد 105 يقبل القسمة على كل من الأعداد 1 ,3,5,7 ومن المساويات:

$105= 105 \times 1$,$105= 3 \times 35$, $105 = 5 \times 21$, $105 = 7 \times 15$.

إذن قواسم العدد 105 هي 1,3,5,7,15,21,35,105.

$D_{105} = \{1,3,5,7,15,21,35,105\}$

مثال 2:

عين كل قواسم العدد 45.

﴿الحل النموذجي﴾

لدينا 45 محصور بين 6^2 و7^2 ومنه نختبر قابلية قسمة 45 على الأعداد من 1 إلى 6 .

نجد 45 يقبل القسمة على كل من الأعداد 1,3,5 ومن المساويات:

$45 = 3 \times 15$ و $45 = 9 \times 5$ و $45 = 45 \times 1$

إذن قواسم العدد 45 هي 1,3,5,9,15,45

$D_{45=}\{1,3,5,9,15,45\}$

القاسم المشترك الأكبر

تعريف

يسمى أكبر قاسم مشترك لعددين طبيعيين a وb القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين ويرمز له بالرمز $PGCD(a,b)$[1]

[1]: PGCD=Plus Grand Diviseur ويعني بالعربية القاسم المشترك الأكبر (اختصارا: gcd باللغة الإنجليزية)

مثال :

قواسم العدد 28 هي 1,2,4,7,14,28.

قواسم العدد 42 هي 1,2,3,6,7,14,21,42.

القواسم المشتركة للعددين 28و 42 هي 1,2,7,14.

القاسم المشترك الأكبر للعددين 28 و42 هو 14 ونكتب: PGCD (28;42) =14

نتائج مباشرة

a و b عددان طبيعيان

- ✓ **PGCD $(a,a) = a$**
- ✓ **PGCD $(a,0) = a$**
- ✓ إذا **كان b قاسما للعدد a فإن :** $PGCD(a;b) = b$
- ✓ $PGCD(a;b) = PGCD(b;a)$

البحث عن القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

هناك عدّة طرق لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين وهي :

1)- إستعمال خوارزمية الفروق المتتابعة

2)- إستعمال خوارزمية عمليات القسمات المتتابعة (خوارزمية إقليدس)

3)- إستعمال التحليل إلى جداء عوامل أوّلية.

4)- إستخدام البرمجيات الحاسوبية كبرمجية Gava [1]و CHAT GPT ولغة البايثون[2].

﴿إستعمال خوارزمية الفروق المتتابعة﴾

تعتمد خوارزمية الفروق المتتابعة على تطبيق الخاصية التالية:

$PGCD(a;b) = PGCD(b;a-b)$ حيث: $(\ a > b\ )$

أمثلة:

مثال 1: أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 117 و91.

﴿الحل النموذجي﴾

$$117 - 91 = 26$$

[1]: هي لغة برمجة حديثة في عالم البرمجة حيث ظهرت بصوزة رسمية عام 1990م حيث قامت بوضع مفاهيمها شركة: Sun Microsystems
المصدر: كتاب أساسيات البرمجة بلغة الجافا للمؤلف محمد محمود إبراهيم موسى (جامعة الزعيم الأزهري) كلية علوم الحاسوب وتقنية المعلومات.

[2]:هي لغة برمجة

najah213.com · نجاح 213

$$91 - 26 = 65$$
$$65 - 26 = 39$$
$$39 - 26 = 13$$
$$26 - 13 = 13$$
$$13 - 13 = 0$$

إذن:

$$PGCD(117; 91) = 13$$

مثال 2: أوجد $PGCD(156; 132)$.

﴿الحل النموذجي﴾

$$156 - 132 = 24$$
$$132 - 24 = 108$$
$$108 - 24 = 84$$
$$84 - 24 = 60$$
$$60 - 24 = 36$$
$$36 - 24 = 12$$
$$24 - 12 = 12$$
$$12 - 12 = 0$$

إذن : $PGCD(156; 132) = 12$

مثال 3: أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 252 و140

﴿الحل النموذجي﴾

$$252 - 140 = 112$$
$$140 - 112 = 28$$
$$112 - 28 = 84$$
$$84 - 28 = 56$$
$$56 - 28 = 28$$
$$28 - 28 = 0$$

إذن: $PGCD(252; 140)$

﴿إستعمال خوارزمية **عمليات القسمات المتتابعة (خوارزمية إقليدس)** ﴾

تعتمد خوارزمية عمليات القسمات المتتابعة (خوارزمية إقليدس) على تطبيق الخاصية التالية:

$PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$ **حيث r هوباقي القسمة الإقليدية للعدد a على b .**

﴿أمثلة﴾

مثال 1: أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 836 و1938.

﴿الحل النموذجي﴾

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$1938 = 836 \times 2 + 266$$
$$836 = 266 \times 3 + 38$$
$$266 = 38 \times 7 + 0$$

إذن: $PGCD(1938; 836) = 38$

مثال 2: أوجد $\boldsymbol{PGCD(595; 560)}$

$$595 = 560 \times 1 + 35$$
$$560 = 35 \times 16 + 0$$

إذن: $PGCD(595; 560) = 35$

مثال 3: أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 285 و45.

$$285 = 45 \times 6 + 15$$
$$45 = 15 \times 3 + 0$$

إذن: $PGCD(285; 45) = 15$

العددان الأوليان فيما بينهما :

تعريف:

العددان الطبيعيان a وb أوليان فيما بينهما يعني أنّ قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1.

نكتب a وb أوليان فيما بينهما يعني أنّ:

$$\boldsymbol{PGCD(a; b) = 1}$$

أمثلة:

قواسم العدد 22 هي 1و2 و11 و22.

قواسم العدد 15 هي 1 و3 و5 و15.

إذن: $PGCD(15; 22) = 1$

أي أنّ العددان 22 و15 أوّليان فيما بينهما.

✓ نقوم بحساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 17 و18

$$18 = 17 \times 1 + 1$$
$$17 = 1 \times 17 + 0$$

إذن : $PGCD(18; 17) = 1$

العددان 18 و17 أوّليان فيما بينهما.

الكسور الغير قابلة للإختزال:

تعريف

najah213.com · نجاح 213

a وb عددان طبيعيان حيث $b \neq 0$.

الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للإختزال يعني a وb أوليان فيما بينهما.

أمثلة:

الكسر $\frac{15}{22}$ غير قابل للإختزال لأن 15 و22 أوّليان فيما بينهما أي $PGCD(22;15) = 1$

✓ الكسر $\frac{28}{42}$ قابل للإختزال لأنّ 28 و42 ليسا أوليين فيما بينهما $\{(PGCD(28;42) = 14$

$$\frac{28}{42} = \frac{28 \div 14}{42 \div 14} = \frac{2}{3}$$

أي أنّ: الكسر $\frac{2}{3}$ غير قابل للإختزال.

(عندما نقسم كلا من البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين نتحصل على كسر غير قابل للإختزال)

✓ $\frac{595}{560} = \frac{17}{16}$ أي: $\frac{595}{560} = \frac{595 \div 35}{560 \div 35} = \frac{17}{16}$

الكسر $\frac{17}{16}$ هو كسر غير قابل للإختزال.

✓ الكسر $\frac{156}{132}$ قابل للإختزال لأن: $PGCD(156;132) = 12$.

$\frac{156}{132} = \frac{156 \div 12}{132 \div 12} = \frac{13}{11}$ وبالتالي: $\frac{13}{11}$ هو كسر غير قابل للإختزال.

﴿تمارين من شهادة التعليم المتوسط﴾

تمرين رقم 1:(من شهادة التعليم المتوسط دورة جوان 2015)

1)- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 696 و406 مع كتابة مراحل الحساب.

2)- أكتب $\frac{696}{406}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

3)- أحسب العدد P حيث : $P = \frac{696}{406} - \frac{3}{7} \times \frac{5}{2}$.

﴿الحل النموذجي لشهادة التعليم المتوسط﴾

1)- حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 696 و406 وكتابة مراحل الحساب:

$$696 = 406 \times 1 + 290$$
$$406 = 290 \times 1 + 116$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$290 = 116 \times 2 + 58$$
$$116 = 58 \times 2 + 0$$

العدد 58 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 696 و406.

2)- كتابة $\frac{696}{406}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

$$\frac{696}{406} = \frac{696 \div 58}{406 \div 58} = \frac{12}{7}$$

3)- حساب العدد P :

$$P = \frac{696}{406} - \frac{3}{7} \times \frac{5}{2}$$
$$P = \frac{12}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{5}{2}$$
$$P = \frac{12}{7} - \frac{15}{14}$$
$$P = \frac{12 \times 2}{7 \times 2} - \frac{15}{14}$$
$$P = \frac{24}{14} - \frac{15}{14}$$
$$P = \frac{24-15}{14}$$
$$P = \frac{9}{14}$$

تمرين رقم 2(من شهادة التعليم المتوسط دورة جوان 2008)

1)- أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 945 و1215.

2)- أكتب $\frac{945}{1215}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

﴿الحل النموذجي لشهادة التعليم المتوسط﴾

1)- إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 945 و1215.

$$1215 = 1 \times 945 + 270$$
$$945 = 3 \times 270 + 135$$
$$270 = 135 \times 2 + 0$$

ومنه: $PGCD(1215; 945) = 135$.

2)- $\frac{945}{1215} = \frac{945 \div 135}{1215 \div 135} = \frac{7}{9}$

تمرين رقم 3(من شهادة التعليم المتوسط دورة جوان 2010)

1)- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 140 و220.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

2)- صفيحة زجاجية مستطيلة الشكل بعداها $1,40m$ و $2,20m$ جُزّئت إلى مربعات متساوية بأكبر ضلع دون ضياع.

أ) - ما هو طول ضلع كل مربع.

ب) - ما هو عدد المربعات الناتجة.

﴿الحل النموذجي لشهادة التعليم المتوسط﴾

1)- حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 140 و220.

$$220 - 140 = 80$$
$$140 - 80 = 60$$
$$80 - 60 = 20$$
$$60 - 20 = 40$$
$$40 - 20 = 20$$
$$20 - 20 = 0$$

إذن : $PGCD(220;140) = 20$

2)- $\mathbf{1,40m = 140cm}$
$\mathbf{2,20m = 220cm}$

أ)- طول ضلع المربع هو القاسم المشترك الأكبر 20

$$220 \div 20 = 11$$
$$140 \div 20 = 7$$

ب) - عدد المربعات هو: $7 \times 11 = 77$

التمرين رقم 4:(من شهادة التعليم المتوسط دورة جوان 2024)

يملك خياط قطعة قماش مستطيلة الشكل عرضها $270cm$ وطولها $378Cm$ ،يريد تجزئة هذه القطعة إلى مربعات متقايسة دون ضياع.

1)- هل يمكن أن يكون طول ضلع كل مربع $10cm$? $18Cm$? برّر جوابك.

2)-أوجد عدد المربعات التي يمكن للخياط تشكيلها حيث يكون طول ضلع كل مربع أكبر ما يمكن.

﴿الحل النموذجي لشهادة التعليم المتوسط﴾

1)- لا يمكن أن يكون طول ضلع كل مربع $10cm$ لأن378 لا يقبل القسمة على 10.

لدينا : $378 = 18 \times 21$ و $270 = 18 \times 15$

ومنه العددين 378 و270 يقبلان القسمة على 18 وعليه يمكن أن يكون طول ضلع كل مربع $18cm$.

2)- إيجاد عدد المربعات التي يمكن تشكيلها

أكبر طول ممكن لضلع كل مربع هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 378 و 270.

نقوم أولا بحساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 378 و270.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$378 = 270 \times 1 + 108$$
$$270 = 108 \times 2 + 54$$
$$108 = 54 \times 2 + 0$$

ومنه: $PGCD(378;270) = 54$

لدينا : $\frac{378}{54} = 378 \div 54 = 7$

$\frac{270}{54} = 270 \div 54 = 5$

إذن: $7 \times 5 \Rightarrow 5$

إذن عدد المربعات التي يمكن تشكيلها هو 35 مربعًا.

التمرين رقم 5 (من شهادة التعليم المتوسط دورة جوان 2016 بتصرف (حذف السؤال 3)

1)- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1053 و832.

2)- أكتب الكسر $\frac{1093}{832}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

﴿الحل النموذجي لشهادة التعليم المتوسط﴾

1)- حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1053 و832.

$$1053 = 832 \times 1 + 221$$
$$832 = 221 \times 3 + 169$$
$$221 = 169 \times 1 + 52$$
$$169 = 52 \times 3 + 13$$
$$52 = 13 \times 4 + 0$$

آجر باق غير معدوم هو 13 إذن: $PGCD(1053;832) = 13$

2)- كتابة الكسر $\frac{1053}{832}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال:

$$\frac{1053}{832} = \frac{1053 \div 13}{832 \div 13} = \frac{81}{64}$$

التمرين رقم 6 :(من شهادة التعليم المتوسط دورة جوان 2014 بتصرف)

إليك الأعداد A و B حيث :

$\boldsymbol{A = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{7}{4}}$ و $\boldsymbol{B = \frac{1{,}2 \times 10^{-2} \times 7}{12{,}5 \times 10^{3}}}$

1)- أحسب A ثم أكتبه على الشكل العشري .

2)- أعط الكتابة العلمية للعدد B .

﴿الحل النموذجي لشهادة التعليم المتوسط﴾

1)- حساب A :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$A = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{7}{4}$$
$$A = \frac{3}{5} + \frac{14}{20}$$
$$A = \frac{3\times4}{5\times4} + \frac{14}{20}$$
$$A = \frac{12}{20} + \frac{14}{20}$$
$$A = \frac{26}{20}$$
$$A = \frac{26 \div 2}{20 \div 2} = \frac{13}{10}$$
$$A = 1{,}3$$

2)- الكتابة العلمية للعدد B :

$$B = \frac{1{,}2\times10^{-2}\times7}{12{,}5\times10^{3}}$$
$$B = \frac{1{,}2\times7}{12{,}5} \times 10^{-2} \times 10^{-3}$$
$$B = 0{,}672 \times 10^{-5}$$
$$B = 6{,}72 \times 10^{-6}$$

الجذر التربيعي لعدد موجب [1]

تعريف

a عدد موجب

الجذر التربيعي للعدد a هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a ونرمز له ب: $\sqrt{a}$ ونقرأ: ﴿الجذر التربيعي للعدد a﴾ .

أمثلة:

- ✓ $\sqrt{4}$ =2 لأن 4 عدد موجب و $2^2 = 4$.
- ✓ كذلك $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{0}$ =0 , $\sqrt{1} = 1$.
- ✓ $\frac{5}{3} = \sqrt{\frac{25}{9}}$
- ✓ خواص:
- ✓ $\sqrt{a}$ هو العدد الموجب الذي مربعه a أي: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

[1]: يعتبر البابليون أوّل من تعاملوا مع مفهوم الجذور التربيعية عمليا وظهرت عندهم في الألواح الطينية التي بها جداول تقريبية لحساب الجذور

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

✓ $\sqrt{a^2}$ هو العدد الموجب الذي مربعه a^2 أي: $\sqrt{a^2} = a$

﴿حل التمرين 4 صفحة 26﴾

4)- كتابة الأعداد على شكل عدد طبيعي:

$\sqrt{-(-49)} = \sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$ | $\sqrt{(-1)^6} = \sqrt{1} = 1$ | $\sqrt{(-1)^2} = 1$

﴿حل التمرين 8 صفحة 26﴾

كتابة الأعداد دون إستعمال الرمز $\sqrt{\ }$:

$$\sqrt{(3-\pi)^2} = \sqrt{[-(\pi-3)]^2} = \sqrt{(\pi-3)^2} = \pi - 3$$

لأن : $\pi > 3$

($b^2 = (-b)^2$ من أجل كل عدد b)

✓ $\sqrt{\pi^2} = \pi$ | $\sqrt{(-3{,}5)^2} = \sqrt{(3{,}5)^2} = 3{,}5$ | $\sqrt{(\pi-2)^2} = \pi - 2$

$$\sqrt{(\pi-5)^2} = \sqrt{[-(5-\pi)]^2} = \sqrt{(5-\pi)^{\ 2}} = 5 - \pi$$

لأن : $5 > \pi$

الأعداد الناطقة والأعداد الغير ناطقة:

a عدد ناطق موجب

✓ في حالة a مربعا لعدد ناطق، يكون $\sqrt{a}$ عددا ناطقا.
✓ في حالة a ليس مربعا لعدد ناطق، فإن $\sqrt{a}$ ليس عددا ناطقا.

المعادلات من الشكل $x^2 = a$:

1)- a عدد موجب

يوجد عددان متعاكسان هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ مربع كل منهما يساوي a .

2)- a عدد كيفي

إذاكان $a > 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حلين متعاكسين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.
إذاكان $a = 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حلا وحيدا هو العدد 0.
إذاكان $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لا تقبل أي حل.

﴿حل التمرين 11 صفحة 26﴾

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$x^2 = 81$ يعني أن: $x^2 = (9)^2$ إذن: $x = -9$ و $x = 9$

ومنه للمعادلة $x^2 = 81$ حلين متعاكسين هما: $x = -9$ و $x = 9$

✓ المعادلة $x^2 = 2{,}89$ تقبل حلين هما: $x = -1{,}7$ و $x = 1{,}7$

✓ المعادلة $x^2 = 0$ تقبل حلا واحدا وهو: $x = 0$

✓ المعادلة $x^2 = -16$ ليس لها حلول.

العمليات على الجذور التربيعية

جداء جذرين تربيعيين

خاصية 1

من أجل كل عددين موجبين a و b :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

البرهان الرياضي:

نفرض أنّ: $x = \sqrt{a \times b}$ و $y = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$$x^2 = \left(\sqrt{a \times b}\right)^2$$

$$x^2 = a \times b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y^2 = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$$

$$y^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2$$

$$y^2 = a \times b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من)(1) و(2) نستنتج أنّ : $x^2 = y^2$

بمأنّ: $a > 0$ و $b > 0$)(لأنّ الجذور التربيعية موجبة)

فإنّ: $x = y$ ومنه :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

قسمة جذرين تربيعيين :

خاصية 2:

من أجل كل عددين موجبين a و b حيث $b \neq 0$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad / \quad \text{حيث: } a > 0 \text{ و } b > 0$$

البرهان الرياضي:

نفرض أنّ : $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$ و $y = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ بتربيع الطرفين نجد أنّ :

najah213.com · نجاح 213

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$x^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$$

$$[1] \ldots\ldots\ldots\ldots x^2 = \frac{a}{b}$$

$$y = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$y^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}$$

$$[2] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y^2 = \frac{a}{b}$$

من[1] و[2] نستنتج بأن: $x^2 = y^2$

إذن: $x = y$

ومنه: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

﴿أمثلة﴾

$$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} \quad \checkmark$$
$$= \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} \quad \checkmark$$
$$= 2\sqrt{7}$$

$$\sqrt{0,9} \times \sqrt{0,4} = \sqrt{0,9 \times 0,4} \quad \checkmark$$
$$= \sqrt{0,36}$$
$$= 0,6$$

$$63 = 9 \times 7 = 3^2 \times 7 \quad \checkmark$$
$$\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{3^2 \times 7}$$
$$= 3\sqrt{7}$$

﴿حل التمرين 21 صفحة 27﴾

تبسيط الأعداد وكتابتها على شكل كسر :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16\times3}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$ ✓

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{2}{2\times9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ ✓

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16\times2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$ ✓

$\frac{\sqrt{400}}{\sqrt{900}} = \frac{\sqrt{4\times100}}{\sqrt{9\times100}} = \frac{\sqrt{4}\times\sqrt{100}}{\sqrt{9}\times\sqrt{100}} = \frac{2}{3}$ ✓

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{448}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7\times64}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$ ✓

﴿مجموع وفرق جذرين تربيعيين﴾

المساواة غير محققة في كل من الجمع والطرح على الجذور التربيعية أي:

a و b عددان موجبان تماما

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ حيث: $a > b$

أمثلة:

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ و $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ ومنه: $5 \neq 7$

أي أنّ: $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$

$\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$ و $\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$ ومنه: $8 \neq 4$

أي أنّ: $\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36}$

تبسيط عبارات تتضمن جذورا تربيعية

لكتابة الجذر التربيعي لعدد طبيعي n على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن نبحث عن أكبر مربع a^2 يقسم n حيث: $n = a^2 \times b$.

الخاصية التوزيعية:

لتبسيط العبارة $x\sqrt{b} + y\sqrt{b} + z\sqrt{b}$ نطبق الخاصية التوزيعية:

$x\sqrt{b} + y\sqrt{b} + z\sqrt{b} \quad (x+y+z)\sqrt{b}$

الكسر الذي مقامه عدد غير ناطق

لجعل مقام الكسر $\frac{a}{\sqrt{b}}$ عددا ناطقا، نضرب كلا من مقامه وبسطه في $\sqrt{b}$

$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

﴿حل دوري الآن (1 و2 صفحة 25)﴾

1)- تبسيط العبارة:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$B = \sqrt{250} - \sqrt{490} + 2\sqrt{81}$$
$$B = \sqrt{25 \times 10} - \sqrt{49 \times 10} + 2\sqrt{(9)^2}$$
$$B = 5\sqrt{10} - 7\sqrt{10} + 2 \times 9$$
$$B = (5-7)\sqrt{10} + 18$$
$$B = -2\sqrt{10} + 18$$

2)- كتابة كل عدد على شكل نسبة مقامها عدد ناطق:

$$\frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$
$$\frac{8}{5\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{8}} = \frac{8}{5\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{4\times2}} = \frac{8}{5\sqrt{2}} - \frac{5}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{8\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}} - \frac{5\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$= \frac{8\sqrt{2}}{5\times2} - \frac{5\sqrt{2}}{2\times2}$$
$$\frac{8\sqrt{2}}{10} - \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{8\sqrt{2}\times2}{10\times2} - \frac{5\sqrt{2}\times5}{4\times5}$$
$$\frac{16\sqrt{2}}{20} - \frac{25\sqrt{2}}{20} = \frac{(16-25)\sqrt{2}}{20}$$
$$= \frac{-9\sqrt{2}}{20}$$

تمارين الجذور التربيعية في شهادة التعليم المتوسط

التمرين رقم 1(من شهادة التعليم المتوسط 2022)

A و B عددان حيث: $A = \sqrt{80} + 2\sqrt{125} - 3\sqrt{20}$ و $B = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

1)- أكتب العدد A على الشكل $a\sqrt{5}$ حيث a عدد طبيعي.

2)- أكتب العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

3)- بين أنّ: $B \times (\sqrt{2} - 1)$ عدد طبيعي.

الحل النموذجي للشهادة

1)- كتابة العدد A على الشكل $a\sqrt{5}$:

$$A = \sqrt{80} + 2\sqrt{125} - 3\sqrt{20}$$
$$A = \sqrt{16 \times 5} + 2\sqrt{25 \times 5} - 3\sqrt{4 \times 5}$$
$$A = 4\sqrt{5} + 2 \times 5\sqrt{5} - 3 \times 2\sqrt{5}$$
$$A = (4 + 10 - 6)\sqrt{5}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$A = 8\sqrt{5}$$

2)- كتابة العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق:

$$B = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$B \quad \frac{(2+\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{2\sqrt{2}+2}{2}$$

$$B = \frac{2\times(\sqrt{2}+1)}{2}$$

$$B = \sqrt{2}+1$$

3)- تبيين أنّ $B \times (\sqrt{2}-1)$ عدد طبيعي:

$$B \times (\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$$

(إستعمال المتطابقة الشهيرة $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$B \times (\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2 - (1)^2 = 2 - 1 = 1$$

1 هو عدد طبيعي إذن $B \times (\sqrt{2}-1)$ عدد طبيعي.

التمرين رقم 2(من شهادة التعليم المتوسط 2021)

1)- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 567 و448.

2)- أكتب على شكل $a + b\sqrt{7}$ كلا من العددين: $A = \sqrt{2} \times \sqrt{8} + \sqrt{448} - \sqrt{567}$ و $B = \sqrt{63} - \sqrt{28} + 4$.

3)- x عدد حقيقي غير معدوم. أوجد قيم x بحيث: $\frac{x}{4+\sqrt{7}} = \frac{4-\sqrt{7}}{x}$

الحل النموذجي للشهادة

1)- حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 567 و448:

$$567 = 448 \times 1 + 119$$
$$448 = 119 \times 3 + 91$$
$$119 = 91 \times 1 + 28$$
$$91 = 28 \times 3 + 7$$
$$28 = 7 \times 4 + 0$$

ومنه: $PGCD(448;567) = 7$

2)- كتابة A و B على شكل $a + b\sqrt{7}$

$$A = \sqrt{2} \times \sqrt{8} + \sqrt{448} - \sqrt{567}$$
$$A = \sqrt{16} + \sqrt{64 \times 7} - \sqrt{81 \times 7}$$

$$A = 4 + 8\sqrt{7} - 9\sqrt{7}$$
$$A = 4 + (8 - 9)\sqrt{7}$$
$$A = 4 - \sqrt{7}$$
$$B = \sqrt{63} - \sqrt{28} + 4$$
$$B = \sqrt{9 \times 7} - \sqrt{4 \times 7} + 4$$
$$B = 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 4$$
$$B = (3 - 2)\sqrt{7} + 4$$
$$B = 4 + \sqrt{7}$$

3)- إيجاد قيم x

لدينا $\frac{x}{4+\sqrt{7}} = \frac{4-\sqrt{7}}{x}$

ومنه: $x^2 = (4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})$

وبالتالي: $x^2 = (4)^2 - (\sqrt{7})^2 = 16 - 7 = 9$

إذن: $x = 3$ أو $x = -3$

التمرين رقم3(من شهادة التعليم المتوسط 2020)

إليك العددين A و B حيث: $A = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \times \frac{5}{14}$, $B = 2\sqrt{112} - 3\sqrt{28} + 3\sqrt{7}$

1)- أكتب A على شكل كسر غير قابل للإختزال .

2)-أكتب B على الشكل $a\sqrt{7}$ حيث a عدد صحيح .

الحل النموذجي للشهادة

1)- كتابة A على شكل كسر غير قابل للإختزال:

$$A = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \times \frac{5}{14}$$
$$A = \frac{2}{3} + \frac{7 \times 5}{3 \times 7 \times 2}$$
$$A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$$
$$A = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{5}{6}$$
$$A = \frac{4+5}{6} \quad \frac{9}{6}$$
$$A = \frac{9 \div 3}{6 \div 3} = \frac{3}{2}$$

2)- كتابة B على الشكل $a\sqrt{7}$ حيث a عدد صحيح:

$$B = 2\sqrt{112} - 3\sqrt{28} + 3\sqrt{7}$$

$$B = 2\sqrt{16 \times 7} - 3\sqrt{4 \times 7} + 3\sqrt{7}$$
$$B = 2 \times 4\sqrt{7} - 3 \times 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$$
$$B = 8\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$$
$$B = (8 - 6 + 3)\sqrt{7}$$
$$B = 5\sqrt{7}$$

التمرين رقم4(من شهادة التعليم المتوسط دورة 2019

ليكن العددان الحقيقيان A و B حيث:

$A = \frac{9}{7} \times \left(\frac{10}{3} - 1\right)$ و $B = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{48}$

1)- بين أنّ A عدد طبيعي.

2)- أكتب العدد B على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي.

3)- أكتب $\frac{A}{B}$ على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

الحل النموذجي للشهادة

1)- التبيين أنّ A عدد طبيعي:

$$A = \frac{9}{7} \times \left(\frac{10}{3} - 1\right)$$
$$A = \frac{9}{7} \times \left(\frac{10}{3} - \frac{3}{3}\right)$$
$$\vdots$$

ومنه : $A = \frac{9}{7} \times \frac{7}{3}$ $A = \frac{9}{3} = 3$ والعدد 3 هو عدد طبيعي .

2)- كتابة العدد B على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي:

$$B = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{48}$$
$$B = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{4 \times 3} - \sqrt{16} \times 3$$
$$B = 5\sqrt{3} + 3 \times 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$
$$B = (5 + 6 - 4)\sqrt{3}$$
$$B = 7\sqrt{3}$$

3)- كتابة $\frac{A}{B}$ على شكل نسبة مقامها عدد ناطق:

$$\frac{A}{B} = \frac{3}{7\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{7 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{7 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

التمرين رقم 5(من شهادة التعليم المتوسط دورة 2018

A و B عددان حيث: $A = 3\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ و $B = 2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}$

1)- بين أنّ A عدد طبيعي.

2)- أكتب العدد B على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي.

3)- بين أنّ: $\frac{A}{B}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

﴿الحل النموذجي للشهادة﴾

1)- التبيين أنّ A عدد طبيعي:

$$A=3\sqrt{8}\times\sqrt{2}$$
$$A=3\sqrt{8\times 2}$$
$$A=3\sqrt{16}$$
$$A=3\times 4$$
$A=12$ و12 عدد طبيعي .

2)- كتابة العدد B على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي:

$$B=2\sqrt{27}-2\sqrt{3}+\sqrt{12}$$
$$B=2\sqrt{9\times 3}-2\sqrt{3}+\sqrt{4\times 3}$$
$$B=2\times 3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}$$
$$B=(6-2+2)\sqrt{3}$$
$$13=6\sqrt{3}$$

3)- التبيين أنّ: $\frac{A}{B}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{A}{B}=\frac{12}{6\sqrt{3}}$$
$$\frac{A}{B}=\frac{12\times\sqrt{3}}{6\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$
$$\frac{A}{B}=\frac{12\sqrt{3}}{6\times 3}=\frac{12\sqrt{3}}{18}=\frac{6\times 2\sqrt{3}}{6\times 3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

najah213.com · نجاح 213

﴿المقطع التعليمي 2: خاصية طاليس وحساب المثلثات في المثلث القائم﴾

1)- التعرف على نظرية فيثاغورس وتطبيقها.

2)- التعرف على خاصية طاليس وكيفية تطبيقها.

3)- التعرف على جيب وجيب تمام وظل زاوية حادة في مثلث قائم

4)-إستعمال الحاسبة لتعيين قيمة مقربة أو قيمة مضبوطة لكل من جيب أو ظل زاوية

5)- حساب زوايا وأطوال بتوظيف الجيب أو جيب تمام أو الظل.

6)-إنشاء زاوية هندسية بمعرفة القيمة المضبوطة لإحدى نسبها المثلثية

7)- معرفة وإستعمال العلاقتين: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

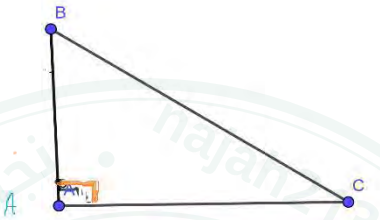
نظرية فيثاغورس﴾ [1]

﴿نظرية فيثاغورس﴾(أو "خاصية فيثاغورس")

إذا كان مثلث قائما، فإنّ مربع طول وتره يُساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه الآخرين.

مثال:

المثلث ABC قائم في A وتر هذا المثلث هو الضلع [BC] فالمساواة: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

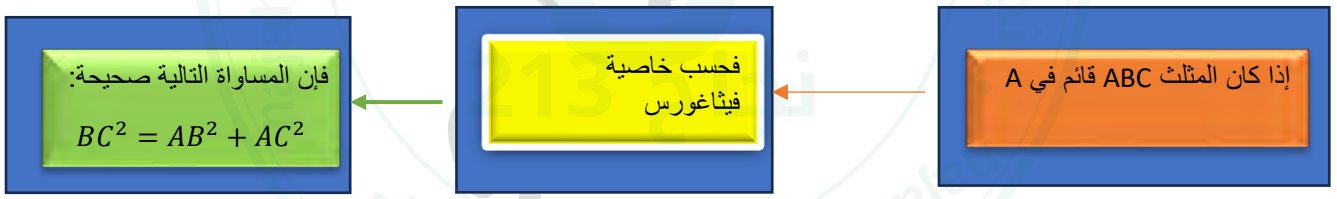


المثلث ABC القائم في A

﴿ملاحظات هامة ﴾:

1)- يمكن القول على نظرية فيثاغورس بخاصية فيثاغورس فكلاهما صحيح.

2)- يمكن ترجمة الخاصية بالمخطط التالي:



3)- تسمح نظرية فيثاغورس بحساب طول ضلع في مثلث قائم بمعلومية طولي الضلعين الآخرين.

4)- خاصية فيثاغورس لا تطبق إلا في المثلثات القائمة.

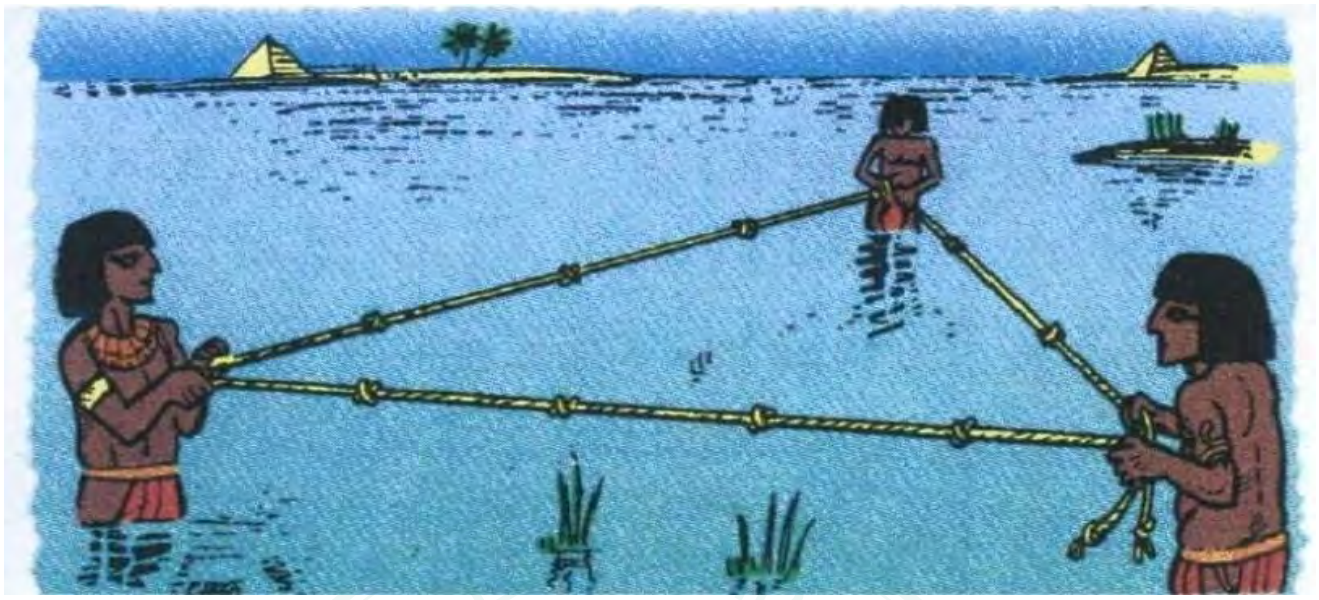
5)- نظرية فيثاغورس كانت تستخدم لدى البابليين والمصريين سابقا حيث كان المصريون يستعملون حبلا مكونا من 12 قطعة متقايسة محدَدة بعقد، يقومون بوصل طرفي الحبل وطيَه حول ثلاث عقد بكيفية تسمح بتشكيل مثلثات خاصة.

﴿نتيجة ﴾

إذا كان في مثلث، مربع أطوال أضلاعه لا يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإنَ هذا المثلث غير قائم.

[1] : ولد فيثاغورس حوالي عام 570قبل الميلاد وعاش مائة عام ويقال 80عاما وكان في شبابه محبا للمعرفة والحكمة وتنسب إليه هذه النظرية (أنظر كتاب فيثاغورس فيلسوف علم الرياضيات للمؤلف فاروق عبد المعطي).

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com



https://www.facebook.com/photo.php?fbid=811435548932626&id=373577506051768&set=a.528519310557586 (المصدر)[1]



https://www.hsaina.com/3college/math/%D8%AF%D8%B1%D8%B3-%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9-%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3.html#google_vignette[2]

﴿تمارين مقترحة﴾

﴿التمرين الأول﴾

أحسب القيمة المضبوطة للطول AB إذا علمت بأن المثلث ABC قائم في C حيث أنّ :

$$AC = 2{,}4cm \quad ;BC = 3{,}2Cm$$

---

[1] [1]: أنظر إلى الموقع الإلكتروني:
https://www.facebook.com/photo.php?fbid=811435548932626&id=373577506051768&set=a.528519310557586(المصدر)

[2] [2] : تم أخذ الصورة من الموقع الإلكتروني الظاهر في الأسفل وقمت بالتصرف في الصورة ببرنامج الرسام
https://www.hsaina.com/3college/math/%D8%AF%D8%B1%D8%B3-%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9-%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3.html#google_vignette

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com



﴿الحل النموذجي﴾

المثلث ABC قائم في C فحسب خاصية فيثاغورس نجد أن :

$$AB^2 = CB^2 + CA^2$$

أي أن : $AB^2 = 3{,}2^2 + 2{,}4^2$

وبالتالي : $AB^2 = 10{,}24 + 5{,}76$

ومنه : $AB^2 = 16$

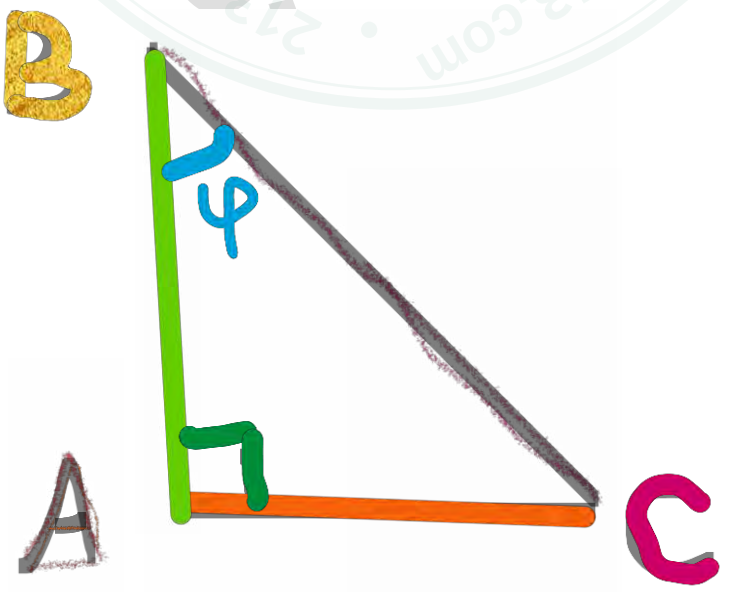
$AB = \sqrt{16}$

إذن: $AB = 4cm$

وبالتالي فإن طول الضلع AB هو 4cm

البرهان الرياضي لنظرية فيثاغورس:

﴿ البرهان بإستخدام النسب المثلثية ﴾



نعتبر المثلث ABC القائم في النقطة A حيث:

AB= b

AC= a

BC= c (الوتر)

$\widehat{B} = \varphi$

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{c}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{c}$$

نستعمل العلاقة الأساسية في المثلثات :

$$\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

نعوض قيمتي $\cos(\varphi)$ و $\sin(\varphi)$ في المعادلة (1) فنجد :

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$$

وبعد التبسيط نجد:

$$\frac{b^2 + a^2}{c^2} = 1$$

أي أنّ:

$$\frac{b^2 + a^2}{c^2} = \frac{1}{1}$$

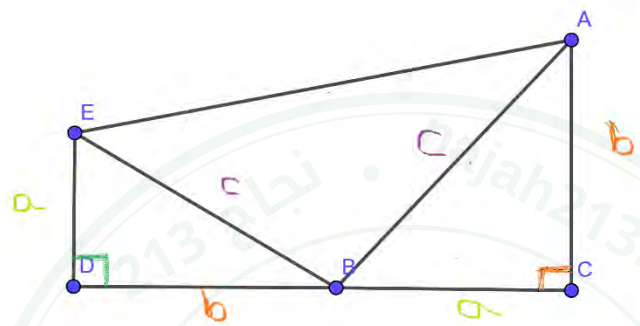
إذن : (جداء الطرفين في الوسطين)

$$(b^2 + a^2) \times 1 = c^2 \times 1$$

ومنه : $a^2 + b^2 = c^2$

وبالتالي: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (وهو المطلوب إثباته)

البرهان بإستخدام المساحات



الشكل المقابل يمثّل مثلثا ABC قائما في C أطوال أضلاعه a وb وc حيث BDE مثلث يقايس المثلث ABC حيث النقط C وB وD في إستقامية.

الشكل AEDC: هوعبارة عن رباعي شبه منحرف

الشكل ABC: هو عبارة عن مثلث قائم في C

الشكل EDB: هو عبارة عن مثلث قائم في D

الشكل ABE: هو مثلث قلئم في B ومتساوي الساقين.

نقوم بحساب مساحة الشكل AEDC بطريقتين مختلفتين

$$S_{AEDC} = \frac{(\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى}) \times \text{الإرتفاع}}{2}$$

$$S_{AEDC} = \frac{(a+b)(a+b)}{2}$$

$$S_{AEDC} = \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$S_{AEDC} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{2ab}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$S_{AEDC} = (\text{مساحة المثلث القائم } EDB + \text{مساحة المثلث القائم } ABC + \text{مساحة المثلث } ABE)$

$$s_{AEDC} = \frac{a \times b}{2} + \frac{a \times b}{2} + \frac{c \times c}{2}$$

$$s_{AEDC} = \frac{2ab}{2} + \frac{c^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و(2) نستنتج بأن :

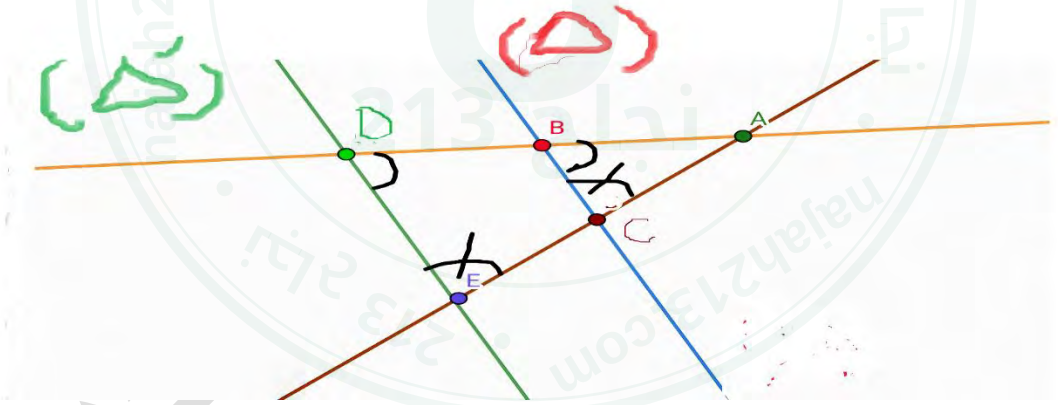
$$\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{2ab}{2} = \frac{2ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} = \frac{c^2}{2}$$

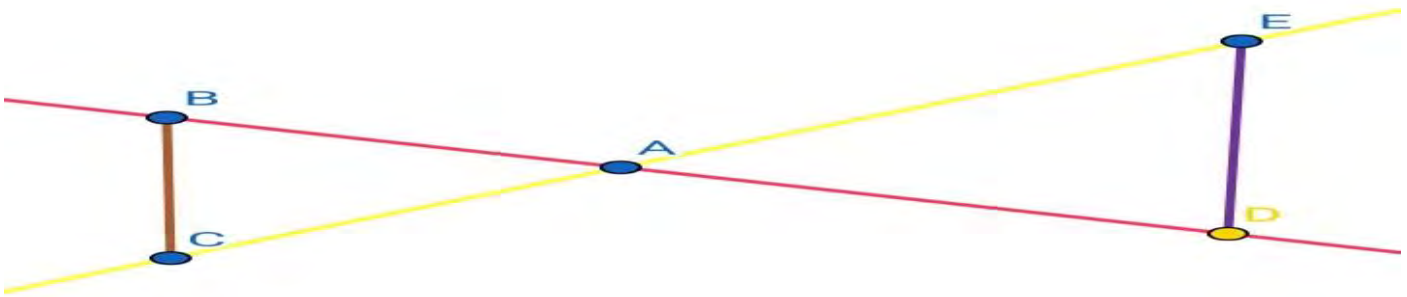
إذن: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

مبرهنة طاليس

إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان في نقطة A يقطعهما مستقيمان (Δ) و(Δ′) في النقط B، C ، D، حسب أحد الشكلين أعلاه، وكان (Δ) //(Δ′) [(Δ) يوازي (Δ′)] ، فإن :
أطوال أضلاع المثلث ABC متناسبة مع أطوال الأضلاع الموافقة لها من المثلث ADE
أي أن: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$



﴿رسم تخطيطي يوضح مبرهنة طاليس باستعمال برمجية GeoGebra [1]﴾



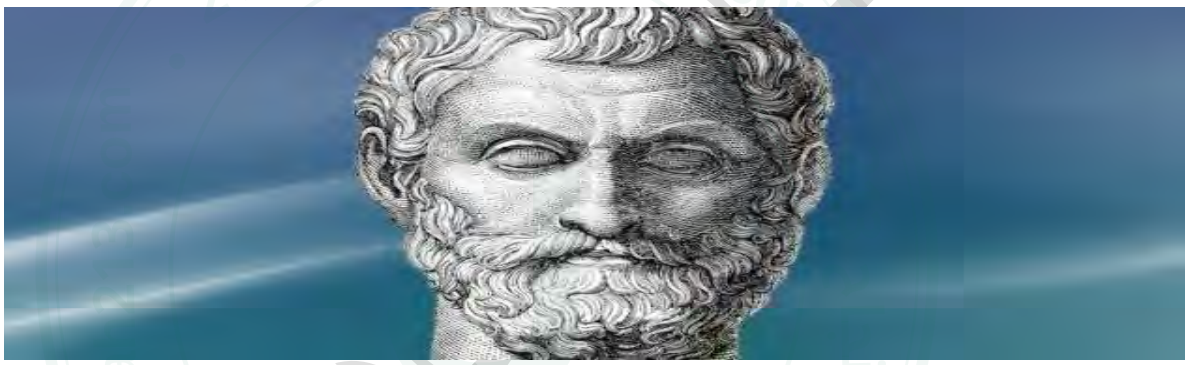
[1] - GeoGebra: هي برمجية تفاعلية يستخدمها الطلبة والباحثون في مجال علم الرياضيات من المرحلة الابتدائية الى المرحلة الجامعية حيث يمكننا هذا البرنامج من انشاء وادراج رسومات هندسية وكذا عبارات رياضية كما يهتم بالجبر والاحصاء وتطبيقات التفاضل والتكامل.

najah213.com · نجاح 213

"طاليس المليطي، ولد في السنة الأولى للأولمبياد الخامس والثلاثين – أي قبل الميلاد بنحو ستمائة وأربعين سنة، لأن الأولمبياد دَوْرٌمدته أربع سنوات – وتوفي في الأولمبياد الثامن والخمسين وعمرثنتان وتسعون سنة، وطاليس هذا من ذرية قور موسى بن أوجنورمن أهالي بلاد الصور من أعمال الشام، وكان سبب انتقاله لمليطة التي ولد فيها طاليس جور ظلمة ملوك بلادهم حتى على صلحاء الناس، وحتى على أهل ذلك الفيلسوف، فلما أهانوهم خرجوا من بلادهم الشامية، وأقاموا بمملكة ملطية اليونانية"[1].

عكس مبرهنة طاليس (مبرهنة طاليس العكسية)

إذا كانت كل من النقط A,,B, D والنقط A، C,على إستقامة واحدة وبنفس الترتيب حسب أحد الشكلين أعلاه وكان: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ فإن: (Δ) يوازي (Δ′) , [(Δ)//(Δ′)]
[(Δ) هو (ED) و (Δ′) هو (CB)]



[2] mawdoo.com

حساب المثلثات في المثلث القائم

1)- جيب تمام زاوية حادّة:

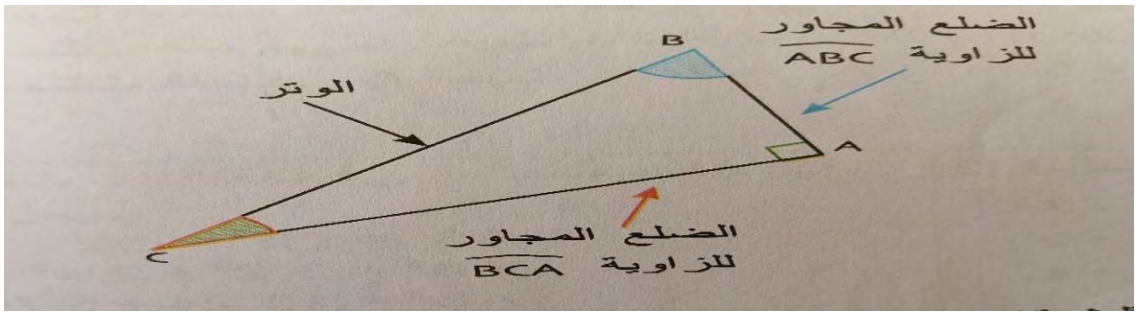
ABC مثلث قائم في A , نقول إنّ :

- ✓ القطعة المستقيمة [BC] هي الوتر
- ✓ [AB] هو الضلع المجاور للزاوية $\hat{B}$
- ✓ [AC] هو الضلع المجاور للزاوية $\hat{c}$

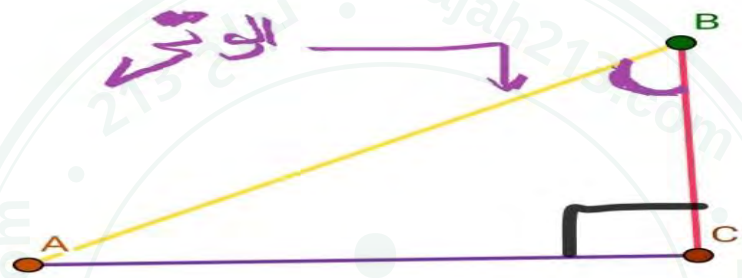
[1]- طاليس المليطي، تاريخ الفلاسفة، ترجمة من اللغة الفرنسية إلى اللغة العربية السيد عبد الله حسين، مكتبة الثقافة الدينية، القاهرة، الطبعة الأولى ،1428ه-2007م، ص5.

[2] : الصورة مأخوذة من الموقع الإلكتروني : mawdoo3.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com



جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم يساوي حاصل قسمة طول الضلع المجاور لهذه الزاوية على طول الوتر.



ABCمثلث قائم في C, نرمز لجيب تمام الزاوية $\hat{B}$ ب $\cos\hat{B}$ ونكتب :

$$\cos\hat{B} = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{BC}{AB}$$

إستعمال الآلة الحاسبة لإيجاد جيب تمام زاوية حادّة :

يمكن إستعمال الآلة الحاسبة العلمية لحساب:

✓ القيمة المضبوطة أو قيمة مقرّبة لجيب تمام زاوية عُلم قيسها باستعمال اللمسة COS

✓ القيمة المضبوطة أو قيمة مقرّبة لزاوية عُلم جيب تمامها باستعمال اللمسة COS^{-1}

ملاحظة: يجب التأكد أوّلا من الوضع: Degrès MODE

لإستعمال اللمسة COS^{-1} نضغط على: cos Inv أو cos shif أو cos 2^{nd}

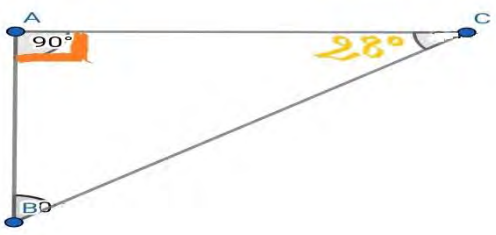
تمرين :

إعتمادا على معطيات الشكل المقابل ,أحسب :

1)- قيمة مقرّبة إلى الجزء من عشرة للطول AC.

2)- قيس الزاوية $\hat{B}$

3)- قيمة مقرّبة إلى الوحدة للطول AB .



(A $\hat{c}$ B= 28° و BC= $4,25m$)

﴿الحل النموذجي﴾

1)- في المثلث ABC القائم في A :

$$\cos\hat{C} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos(28^0) = \frac{AC}{4{,}25}$$

$$AC = 4{,}25 \times \cos(28^o)$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $AC \simeq 3{,}8m$

2)- الزاويتان الحادّتان في مثلث قائم متتامتان وبالتالي:

$$\hat{B} = 90^0 - 28^0$$

$$\hat{B} = 62^0$$

3)-)- في المثلث ABC القائم في A :

$$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos(62^0) = \frac{AB}{4{,}25}$$

$$AB = 4{,}25 \times \cos(62^0)$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $AB \simeq 2m$

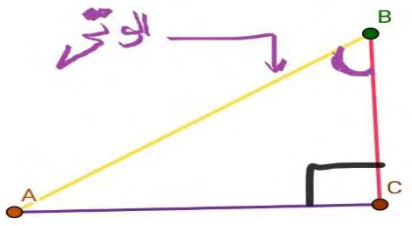
جيب زاوية حادة

تعريف

في مثلث قائم، جيب زاوية حادة يساوي حاصل القسمة طول الضلع المقابل لهذه الزاوية على طول الوتر

نرمز لجيب الزاوية $\hat{B}$ بالرمز $\sin\hat{B}$

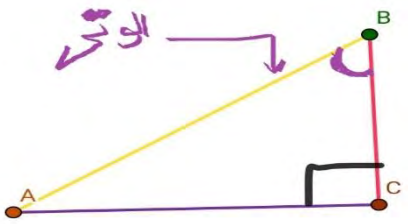
$$\sin(\hat{B}) = \frac{AC}{AB}$$



ظل زاوية حادة

تعريف

في مثلث قائم، ظل زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المقابل لهذه الزاوية على طول الضلع المجاور لهذه الزاوية



نرمز لظل الزاوية $\hat{B}$,بالرمز $\tan(\hat{B})$

$$\tan(\hat{B}) = \frac{AC}{BC}$$

حساب طول ضلع مثلث قائم بإستعمال الجيب:

تمرين: ABC مثلث قائم في Aحيث: $Ac = 2{,}5cm$ $\hat{B} = 25^0$

1)- أحسب BC(أعط المدور إلى الجزء من 100 للطول BC .



﴿الحل النموذجي﴾

في المثلث ABC القائم في A,الضلع [BC] هو وتره و[AC] هو الضلع المقابل للزاوية $\hat{B}$ ،إذن:

$$Sin(\hat{B}) = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin(25^{\circ}) = \frac{2{,}5}{BC}$$

$$BC = \frac{2{,}5}{\sin(25^0)}$$

لحساب المدوّر إلى الجزء من 100 للطول BC، نستعمل الآلة الحاسبة حيث نبرمج هذه الآلة إلى وحدة الدرجة ثم ننفذ البرنامج التالي (من اليسار إلى اليمين)

ON	2,5		SIN	25

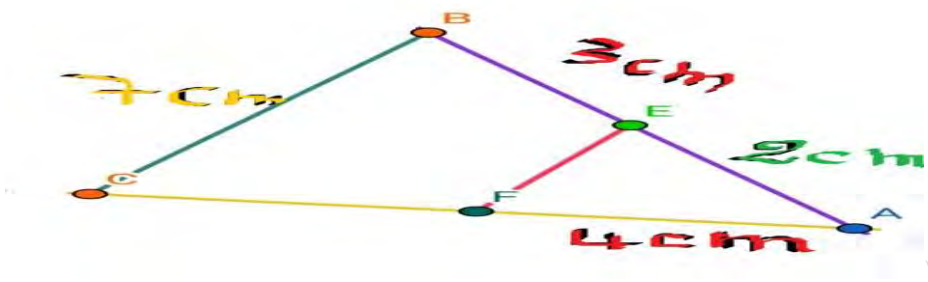
يظهر على الشاشة العدد 5,915503958

المدوّر إلى الجزء من 100 للطول BCهو 5,92 ونكتب: $BC \simeq 5{,}92cm$

التمرين رقم 1(من شهادة التعليم المتوسط دورة جوان 2010)

في الشكل المقابل $(BC)//(EF)$

1)- أحسب الطولين EF،FC .



الحل النموذجي

1)- حساب الطولين FE Fc

بمأن: النقط B, E, A في إستقامية وكذلك C, F, A في إستقامية ولدينا (EF) $//(BC)$ فحسب خاصية طاليس نجد أنّ:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{FE}{CB}$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{4}{AC} = \frac{2}{5} = \frac{FE}{7}$$

$$AC = \frac{4\times5}{2} = \frac{20}{2} = 10cm$$

$$FC = AC - AF = 10 - 4 = 6cm$$

$$FE = \frac{2\times7}{5} = 2{,}8cm$$

التمرين رقم 2(من شهادة التعليم المتوسط دورة جوان 2011)

ABCمثلث قائم الزاوية في A . [AH] الإرتفاع المتعلق بالوتر [BC]

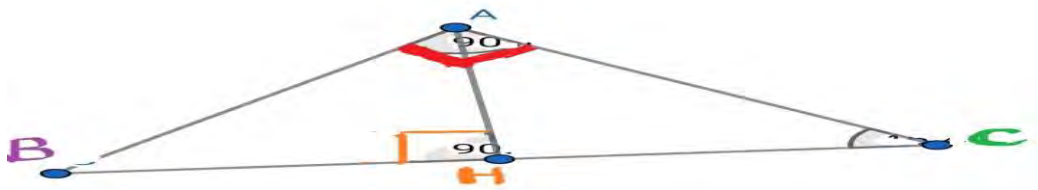
بيّن أنّ: $AB^2 = BH \times BC$ يمكنك الإعتماد على $\cos A\hat{B}C$ في كل من المثلثين ABCوABH

الحل النموذجي

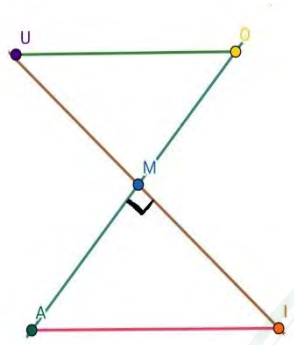
في المثلث ABC : $\cos(A\hat{B}c) = \frac{AB}{BC}$

في المثلث ABH: $\cos(A\hat{B}C) = \frac{BH}{AB}$

ومنه : $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$ إذن: $AB \times AB = BH \times BC$ وبالتالي: $AB^2 = BH \times BC$



التمرين رقم 3(من شهادة التعليم المتوسط دورة 2017)



الشكل المقابل غير مرسوم بأبعاده الحقيقية (وحدة الطول هي الميليمتر)

$$MA = 27mm$$
$$Mo = 21mm$$
$$MI = 36mm$$
$$MU = 28mm$$

1)- بين أنّ المستقيمين (AI) و (OU) متوازيان .

2)- أحسب قيس الزاوية $A\hat{I}M$ (بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة)

﴿ الحل النموذجي ﴾

1)- التبيين أنّ: المستقيمين (AI) و (OU) متوازيان

لدينا النقط U,M,I في إستقامية وكذلك النقط وكذلك النقط A,M,O ولدينا:

$$\frac{M0}{MA} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$
$$\frac{MU}{MI} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

ومنه: $\frac{M0}{MA} = \frac{MU}{MI}$ وحسب النظرية العكسية لطالس فإنّ $(OU)\ //\ (AI)$

2)- حساب قيس الزاوية $A\hat{I}M$:

لدينا في المثلث AIM القائم في M : $\tan(A\hat{I}M) = \frac{AM}{MI} = \frac{27}{36}$

$$\tan(A\hat{I}M) = 0{,}75$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد:..... $A\hat{I}M = 36{,}869$ ...

إذن: $A\hat{I}M = 37°$ (بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة).

التمرين رقم 4☹من شهادة التعليم المتوسط 2018)

ABCDمستطيل حيث:

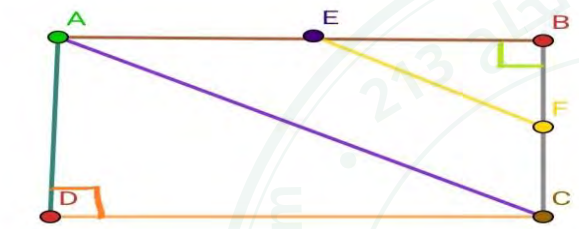
$AD = 6Cm$ و $DC = 8Cm$

1)- أحسب الطول AC .

2)- E وF نقطتان من الضلعين $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب حيث: $BF = 1{,}5Cm$ و $BE = 2cm$

- بين أنّ: $(EF)\ //\ (AC)$

3)- أحسب قيس الزاوية $B\hat{E}F$ بالتدوير إلى الوحدة.



﴿ الحل النموذجي ﴾

1)- حساب الطول AC:

لدينا المثلث ADC القائم في Dفحسب خاصية فيثاغورس نجد أنّ:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$AC^2 = 6^2 + 8^2$$
$$AC^2 = 36 + 64 = 100$$
$$AC^2 = \sqrt{100} = 10Cm$$

2)- إثبات أنّ: $(EF)\ //\ (AC)$

لدينا: $\begin{cases} \frac{BE}{BA} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \frac{BF}{BC} = \frac{1{,}5}{6} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \end{cases}$

بمأنّ: $\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC}$ فإنّ: $(EF)\ //\ (AC)$ وذلك حسب خاصية طالس العكسية.

3)- حساب قيس الزاوية $B\hat{E}F$ بالتدوير إلى الوحدة:

$$\tan(B\hat{E}F) = \frac{BF}{BE} = \frac{1,5}{2} = 0,75$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجدأنّ: $B\hat{E}F = 37^0$.

التمرين رقم 5 (من شهادة التعليم المتوسط 2020)

الشكل المقابل غير مرسوم بالأبعاد الحقيقية .

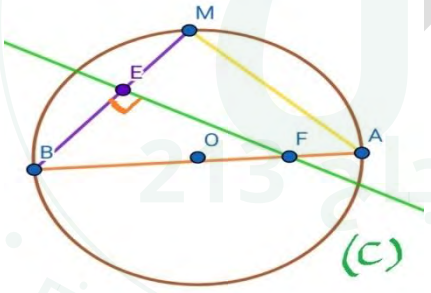
(c) دائرة مركزها النقطة O وقطرها $[AB]$ حيث $AB = 10Cm$ ، M نقطة من (c) حيث $BM = 6cm$

1)- بين نوع المثلث MBA ثم أحسب الطول AM

2)-أحسب قيس الزاوية $M\hat{B}A$ ثم أعط مدور النتيجة إلى الوحدة بالدرجة.

- Eنقطة من $[BM]$ حيث $BE = 4,2Cm$ المستقيم الذي يشمل E ويعامد (BM) يقطع $[AB]$ في النقطة F

3)- أحسب الطول BF .



﴿الحل النموذجي﴾

1) تحديد نوع المثلث AMB

رؤوس المثلث AMBتنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$ فالمثلث AMB قائم في M حسب خاصية الدائرة المحيطة بالمثلث القائم

2)- حساب الطول AM

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث AMB القائم في M

$$AB^2 = AM^2 + BM^2$$

$$AM^2 = AB^2 - BM^2$$

$$AM^2 = 10^2 - 6^2$$

najah213.com · نجاح 213

$$AM^2 = 64$$
$$AM = \sqrt{64} = 8Cm$$

2)- حساب $\cos(A\hat{B}M)$

$$\cos(A\hat{B}M) = \frac{BM}{AB} = \frac{6}{10} = 0,6$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $A\hat{B}M = 53,13^0$

بالتدوير إلى الوحدة $A\hat{B}M = 53^\circ$

3)- حساب BF

لدينا :

$(MA) \perp (MB)$
$(FE) \perp (MB)$

فحسب خاصية التوازي والتعامد نستنتج بأنّ: $(MA) \,//\, (FE)$

وبتطبيق خاصية طاليس على المثلث ABM نجد: $\frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BM}$

بالتعويض نجد: $\frac{BF}{10} = \frac{4,2}{6}$ وبالتالي $BF = \frac{10\times4,2}{6}$

$BF = 7cm$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

﴿المقطع التعليمي الثالث: الحساب الحرفي، المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد ﴾

الموارد التعليمية:

1)- معرفة المتطابقات الشهيرة وتوظيفها في الحساب

2)- نشر وتحليل عبارات جبرية بسيطة

3)-معادلات الجداء المعدوم وكيفية حلولها

4)-المتراجحات بمجهول واحد وكيفية حلولها

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

النشر:

تعريف

نشر عبارة جداء يعني كتابة هذه العبارة على شكل مجموع أو فرق

خواص:

a و b و c و k أعداد

- $k(a+b)=ka+kb$
- $k(a-b)=ka-kb$
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

المتطابقات الشهيرة

تعريف

المتطابقة هي مساواة صحيحة من أجل كل القيم المعطاة للحروف الواردة في المساواة

المتطابقة الشهيرة رقم 1(مربع مجموع)

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

المتطابقة الشهيرة رقم2(مربع فرق)

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

المتطابقة الشهيرة رقم 3(جداء مجموع حدين وفرقهما)

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

التحليل:

تعريف:

تحليل عبارة مجموع هو كتابتها على شكل جداء

خواص:

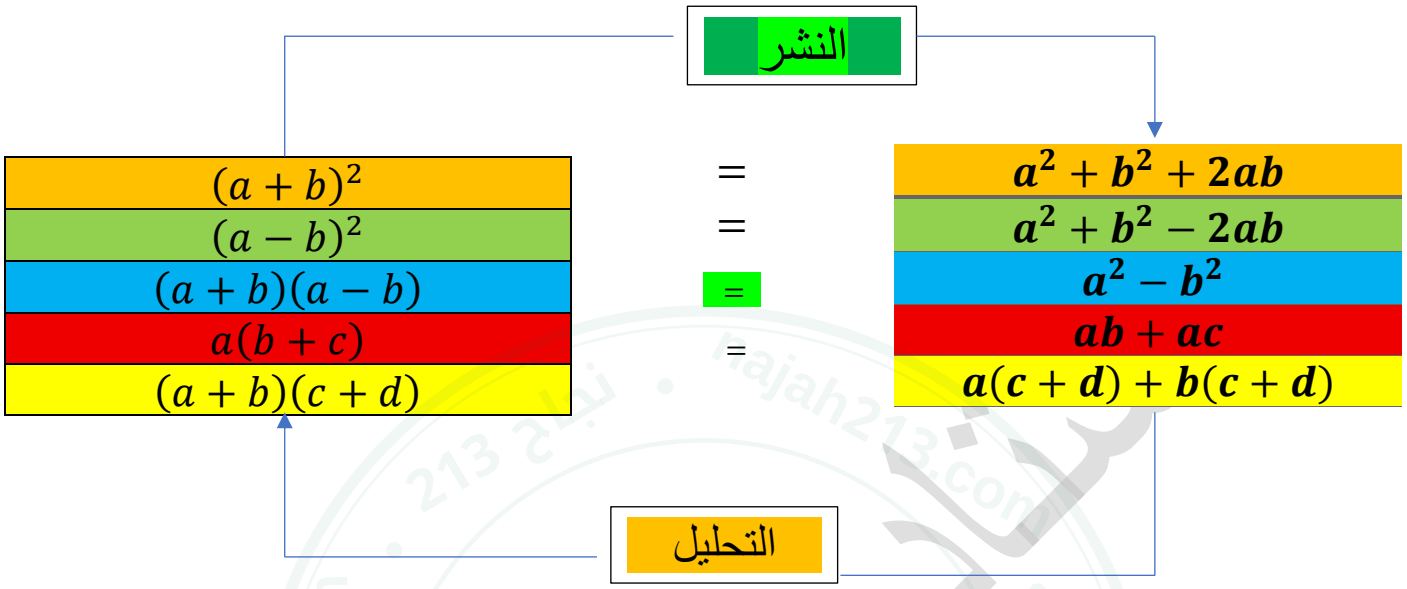
a و b و c و k أعداد

- الخاصية التوزيعية:$ka+kb=k(a+b)$
- $k(a-b)=ka-kb$
- المتطابقات الشهيرة:
- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
  $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

مخطط يوضح الفرق بين النشر والتحليل



المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد [1]

يؤول حل كل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إلى حل معادلة من الشكل $ax = b$ حيث $a \neq 0$

الحل الوحيد لهذه المعادلة هو العدد $\frac{b}{a}$

معادلات جداء معدوم

تعريف

كل معادلة من الشكل $(ax+b)(cx+d) = 0$

حيث a و b و c و d أعداد معلومة تسمّى معادلة جداء معدوم.

حلول معادلة الجداء المعلوم

حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d) = 0$ هي حلول المعادلتين و $ax + b = 0$ $cx + d = 0$

[1]: يعدّ أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي عالما موسوعيا حيث برز في الرياضيات والفلك فهو أول من إستعمل كلمة «جبر» للعلم المعروف الآن بهذا الإسم حيث حقق إنجازا باهرا بتأليفه لكتاب الجبر والمقابلة وقام الخوارزمي بتقسيم الأعداد إلى ثلاثة أنواع جذر أي «x» ومال أي «x^2» ومفرد وهو العدد الخالي من «x» فكان للخوارزمي الفضل في بروز المعادلات

التمرين رقم 1(من شهادة التعليم المتوسط 2022)

1)- أنشر وبسّط العبارة E بحيث: $E = (2x - 3)(x - 2)$

2)- حلل العبارة F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى: $F = 2x^2 - 7x + 6 - (2x - 3)(2x - 1)$

3)- حل المعادلة: $(2x - 3)(-x - 1) = 0$

﴿الحل النموذجي للشهادة﴾

1)- نشر وتبسيط العبارة E:

$$E = (2x - 3)(x - 2)$$
$$E = 2x^2 - 4x - 3x + 6$$
$$E = 2x^2 - 7x + 6$$

2)- تحليل العبارة F

$$F = 2x^2 - 7x + 6 - (2x - 3)(2x - 1)$$
$$F = (2x - 3)(x - 2) - (2x - 3)(2x - 1)$$
$$F = (2x - 3)(x - 2 - 2x + 1)$$
$$F = (2x - 3)(-x - 1)$$

3)- حل المعادلة $(2x - 3)(-x - 1) = 0$

$(2x - 3)(-x - 1) = 0$ معناه:

$$\begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ 2x = 3 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{أو :} \quad \begin{cases} -x - 1 = 0 \\ -x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

إذن للمعادلة حلين هما: -1 و $\frac{3}{2}$

التمرين رقم 2 (من شهادة التعليم المتوسط 2021)

- لتكن العبارة الجبرية: $E = (x - 3)(x - 10) + 3(x - 3)$

1)- أنشر وبسط العبارة E

2)- حلل إلى جداء عاملين العبارة E

3)- حل المعادلة: $(x - 3)(x - 7) = 0$

4)- أحسب E من أجل $x = 50$

﴿الحل النموذجي للشهادة﴾

1)- نشر وتبسيط العبارة E:

$$E = (x - 3)(x - 10) + 3(x - 3)$$
$$E = x^2 - 10x - 3x + 30 + 3x - 9$$
$$E = x^2 - 10x + 21$$

2)- تحليل العبارة E

$$E = (x-3)(x-10)+3(x-3)$$
$$E = (x-3)[(x-10)+3]$$
$$E = (x-3)(x-10+3)$$
$$E = (x-3)(x-7)$$

3)- حل المعادلة $(x-3)(x-7)=0$

لدينا: $(x-3)(x-7)=0$ ومنه:

$$\begin{cases} x-3=0 \\ x=3 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x-7=0 \\ x=7 \end{cases}$$

إذن للمعادلة حلان هما 3و 7 .

4)- حساب E من أجل $x=50$

$$E = (50-3)(50-7)$$
$$E = 47 \times 43$$
$$E = 2021$$

التمرين رقم 3 (من شهادة التعليم المتوسط 2020)

E عبارة جبرية حيث: $E = (3x+1)^2 - (x-2)^2$

1)- أنشر وبسّط العبارة E

2)- حلل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى

3)- حل المعادلة: $(4x-1)(2x+3)=0$

الحل النموذجي للشهادة

1)- نشر وتبسيط العبارة E:

$$E = (3x+1)^2 - (x-2)^2$$
$$E = (9x^2+1+6x) - (x^2+4-4x)$$
$$E = 9x^2+1+6x-x^2-4+4x$$
$$E = 8x^2+10x-3$$

2)- تحليل العبارة E:

$$E = (3x+1)^2 - (x-2)^2$$
$$E = [(3x+1)+(x-2)][(3x+1)-(x-2)]$$
$$E = (3x+1+x-2)(3x+1-x+2)$$
$$E = (4x-1)(2x+3)$$

3)- حل المعادلة $(4x-1)(2x+3)=0$

لدينا: $(4x-1)(2x+3)=0$

معناه: إما $4x-1=0$ أو $2x+3=0$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ومنه: $4x = 1$ أو $2x = -3$

ومنه: $x = \frac{1}{4}$ أو $x = \frac{-3}{2}$

للمعادلة حلان هما $\frac{1}{4}$ و $\frac{-3}{2}$

التمرين رقم 4 (من شهادة التعليم المتوسط 2015)

تعطى العبارة: $F = (2x-3)^2 - 16$

1)- تحقق بالنشر أنّ: $F = 4x^2 - 12x - 7$

2)- حلل F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى

3)- حل المعادلة $(2x-7)(2x+1) = 0$

4)-أحسب F من أجل $x = 1 + \sqrt{2}$ واكتب النتيجة على الشكل $a + b\sqrt{2}$ حيث a و b عددان نسبيان.

الحل النموذجي للشهادة

1)- التحقق بالنشر أنّ: $F = 4x^2 - 12x - 7$

$$F = (2x-3)^2 - 16$$
$$F = [(2x)^2 + (3)^2 - 2 \times 2x \times 3] - 16$$
$$F = 4x^2 + 9 - 12x - 16$$
$$F = 4x^2 - 12x - 7$$

2)- تحليل F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى:

$$F = (2x-3)^2 - 16$$
$$F = (2x-3)^2 - (4)^2$$
$$F = [(2x-3) + 4][(2x-3) - 4]$$
$$F = (2x+1)(2x-7)$$

3)- حل المعادلة $(2x-7)(2x+1) = 0$

$$\begin{cases} 2x+1 = 0 \\ 2x = -1 \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 2x-7 = 0 \\ 2x = 7 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

وبالتالي للمعادلة حلان هما $-\frac{1}{2}$ و $\frac{7}{2}$

4)- حساب F من أجل $x = 1 + \sqrt{2}$ وكتابة النتيجة على الشكل $a + b\sqrt{2}$

$$F = 4x^2 - 12x - 7$$
$$F = 4\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 12\left(1+\sqrt{2}\right) - 7$$
$$F = 4\left(1 + 2 + 2\sqrt{2}\right) - 12 - 12\sqrt{2} - 7$$
$$F = 4\left(3 + 2\sqrt{2}\right) - 12 - 12\sqrt{2} - 7$$
$$F = 12 + 8\sqrt{2} - 12 - 12\sqrt{2} - 7$$

$$F = (8 - 12)\sqrt{2} - 7$$
$$F = -4\sqrt{2} - 7$$

التمرين رقم 5 (من شهادة التعليم المتوسط جوان 2014)

لتكن العبارة E حيث: $E = (2x + 5)^2 - 36$

1)- تحقق بالنشر أنّ: $E = 4x^2 + 20x - 11$

2)- حلّل العبارة E إلى جداء عاملين

3)- حل المعادلة: $(2x + 11)(2x - 1) = 0$

﴿الحل النموذجي للشهادة﴾

1)- التحقق أنّ: $E = 4x^2 + 20x - 11$

$$E = (2x + 5)^2 - 36$$
$$E = 4x^2 + 20x + 25 - 36$$
$$E = 4x^2 + 20x - 11$$

2)-التحليل:

$$E = (2x + 5)^2 - 36$$
$$E = (2x + 5)^2 - (6)^2$$
$$E = (2x + 5 + 6)(2x + 5 - 6)$$
$$E = (2x + 11)(2x - 1)$$

3)-حل المعادلة $(2x + 11)(2x - 1) = 0$

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 2x + 11 = 0 \\ 2x = -11 \\ x = \frac{-11}{2} \end{cases}$$

المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

يقال عن متراجحة أنّها من الدرجة الأولى لمجهول x ،إذا أمكن كتابتها على أحد الأشكال الآتية:

$$ax + b < cx + d \quad \text{أو} \quad ax + b > cx + d$$
$$ax + b \leq cx + d \quad \text{أو} \quad ax + b \geq cx + d$$

﴿تمارين المتراجحات في شهادة التعليم المتوسط﴾

التمرين رقم 1(من شهادة التعليم المتوسط (السؤال الثالث من التمرين الثاني دورة 2018)

حل المتراجحة: $(3x + 1)(x - 4) \leq 3x^2 + 7$

الحل النموذجي

لدينا : $(3x + 1)(x - 4) \leq 3x^2 + 7$ أي: $3x^2 - 12x + x - 4 \leq 3x^2 + 7$

ومنه: $3x^2 - 3x^2 - 12x + x \leq +4 + 7$ إذن: $-11x \leq 11$ وبالتالي: $x \geq \frac{11}{-11}$

معناه: $x \geq -1$

التمرين رقم 2(من شهادة التعليم المتوسط (السؤال الثالث من التمرين الثاني دورة 2016)

1)- حل المتراجحة: $-14x^2 - 11x - 2 < 2(10 - 7x^2)$

2)- مثل حلولها بيانيا

الحل النموذجي

1)- حلول المتراجحة: $-14x^2 - 11x - 2 < 2(10 - 7x^2)$

$$-14x^2 - 11x - 2 < 2(10 - 7x^2)$$
$$-14x^2 - 11x - 2 < 20 - 14x^2$$
$$-14x^2 - 11x + 14x^2 < 2 + 20$$
$$-11x < 22$$
$$x > -2$$

وبالتالي حلول المتراجحة: $-14x^2 - 11x - 2 < 2(10 - 7x^2)$ هي كل قيم x الأكبر تماما من -2

تمثيل حلول المتراجحة بيانيا:



التمرين رقم 3(من شهادة التعليم المتوسط 2013)

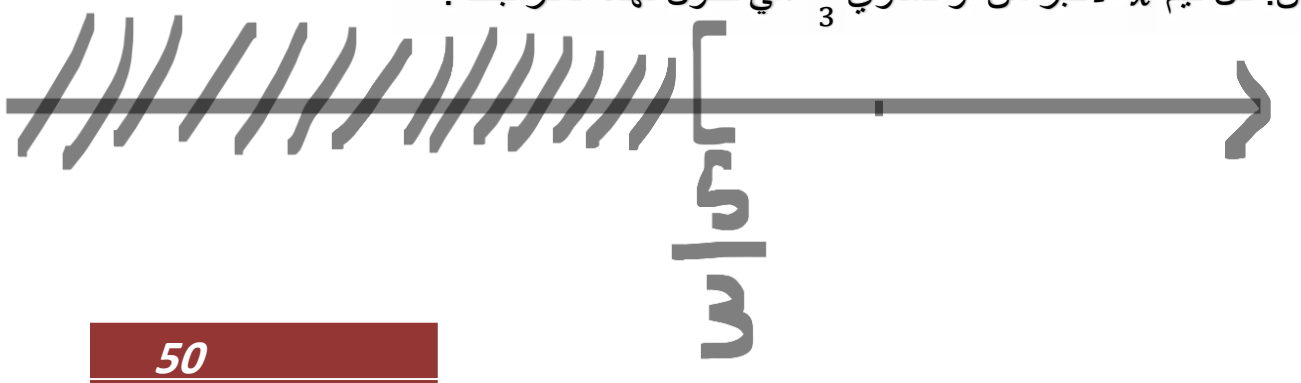
لتكن العبارة: $A = 3x - 5$ حيث x عدد حقيقي

حل المتراجحة: $A \geq 0$ ثم مثل مجموعة حلولها بيانيا.

الحل النموذجي

لدينا: $A \geq 0$ وبالتالي: $3x \geq 5$ ومنه: $x \geq \frac{5}{3}$

إذن: كل قيم x الأكبر من أو تساوي $\frac{5}{3}$ هي حلول لهذه المتراجحة.



najah213.com · نجاح 213

﴿المقطع التعليمي الرابع :الأشعة والإنسحاب ﴾

الموارد التعليمية:

الانسحاب ومفهوم الشعاع

تساوي شعاعين

مجموع شعاعين

الشعاعان المتعاكسان

مركبتا شعاع

حساب إحداثيتي شعاع

المسافة بين نقطتين

حساب إحداثيتي منتصف قطعة مستقيم

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الإنسحاب ومفهوم الشعاع :

المنحى والإتجاه:

عندما يكون مستقيمان متوازيان نقول إنّ لهذين المستقيمين نفس المنحى.

للمستقيمين (d_1) و (d_2) نفس المنحى معناه (d_1) // (d_2) .

النقطتان المتمايزتان A وb تعينان على المستقيم (AB) إتجاهين أحدهما من A نحو B والآخر من B نحوA.

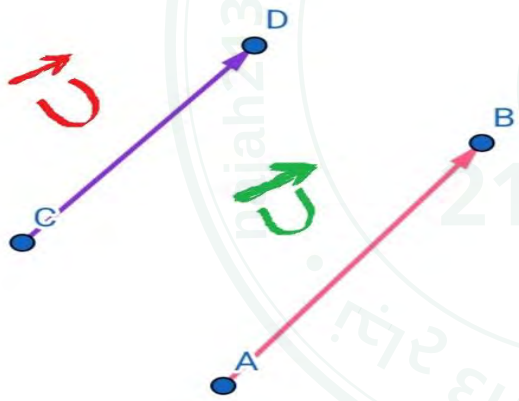




الانسحاب ومفهوم الشعاع:

A وB نقطتان متمايزتان, الانسحاب الذي يحوّل A إلى B يحوّل أيضا C إلى D, كل من الثنائيات $(A;B)$ و$(C;D)$,تعرف نفس الشعاع $\vec{U}$ الذي :

- منحاه هو منحى المستقيم (AB)
- إتجاهه من A إلى B.
- طويلته هي طول القطعة $[AB]$



- يمكن أن نرمز لهذا الشعاع بالرمز $\overrightarrow{AB}$ (مبدؤه A ونهايته B) أو $\overrightarrow{CD}$
- نقول إنّ كل من $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{CD}$ هو ممثل للشعاع $\vec{U}$.

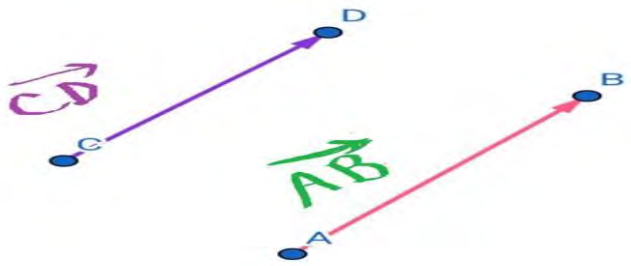
تساوي شعاعين:

القول عن شعاعين أنّهما متساويان يعني أنّ لهما نفس المنحى ونفس الإتجاه ونفس الطول

مثال: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ معناه :

- للشعاعين $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$:نفس المنحى ونفس الإتجاه ونفس الطول
- الانسحاب الذي يحول A إلى B يحول أيضا C إلى D.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

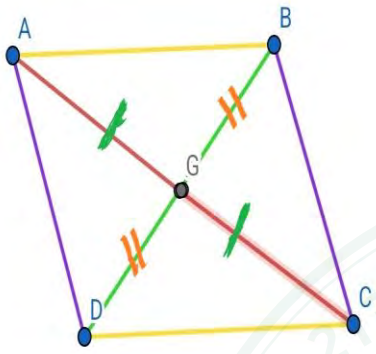


الشعاعان المتساويان ومتوازي الأضلاع

خاصية:

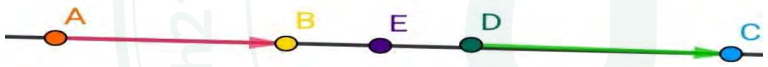
أربع نقط D, C, B,A بحيث كل ثلاثة منها ليست في إستقامية

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ تعني أنّ الرباعي ABCD متوازي أضلاع



ملاحظات:

- من أجل كل أربع نقط D,C,B,A لدينا :
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه للقطعتين [AC] و[BD]نفس المنتصف.



- إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

حالة خاصة: النقط D,C,B,A في إستقامية

إثبات تساوي شعاعين :

طريقة:

لإثبات تساوي شعاعين نعتمد على متوازي أضلاع أو على الانسحاب

✓ الشعاعان المتساويان ومفهوم منتصف قطعة:

خاصية : I, B,A ثلاث نقط.

إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

إذا كان $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ فإن I منتصف [AB].



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

على الشكل المقابل لدينا: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ لأنّ للشعاعين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{IB}$ نفس المنحى ونفس الإتجاه و $AI = IB$

إذن: I منتصف $[AB]$

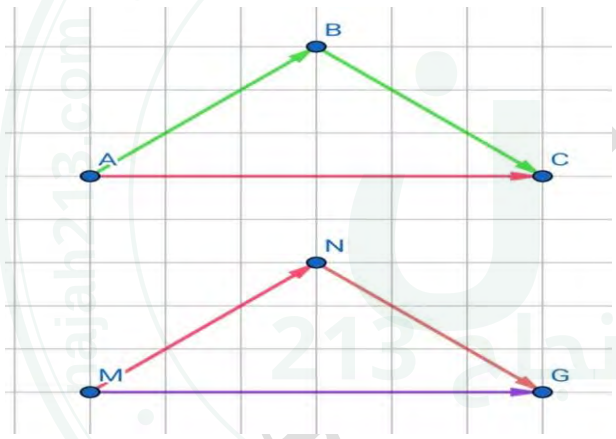
مجموع شعاعين :

1)-صورة نقطة بانسحابين متتابعين :

C, B, A ثلاث نقط .

إذا كانت صورة نقطة كيفية M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ هي N وصورة N بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ هي G فإنّ:

G هي صورة M بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ونقول $\overrightarrow{AC}$ هو مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$.

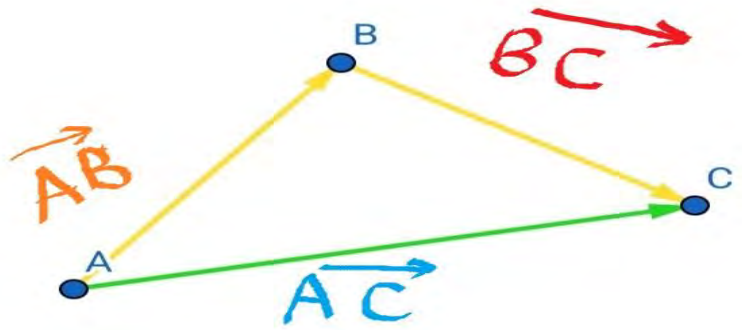


مجموع شعاعين:

C, B, A ثلاث نقط.

مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ونكتب: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

المساواة: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ تسمّى علاقة شال[1] (لاحظ أنّ نهاية الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو مبدأ الشعاع $\overrightarrow{BC}$)



حالة خاصة:

إذا كانت A منطبقة على B نقول أنّ $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع المعدوم ويرمز إليه بالرمز $\vec{0}$

$$\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$$

الشعاعان المتعاكسان

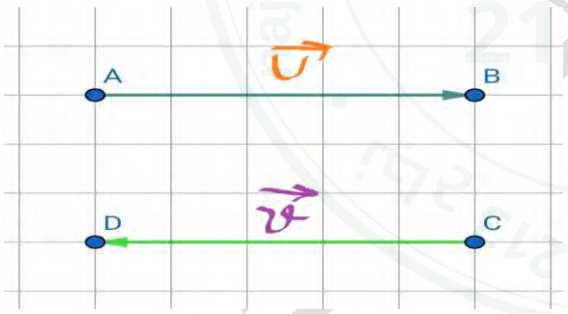
A و B نقطتان وكما نعلم بأنّ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

نقول أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان ونكتب: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

للشعاعين المتعاكسين نفس الطول ونفس المنحى وإتجاهين متعاكسين

مثال: الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعاكسان

$\vec{u}=-\vec{v}$



قاعدة متوازي الأضلاع

C,B,A ثلاث نقط ليست على إستقامية.

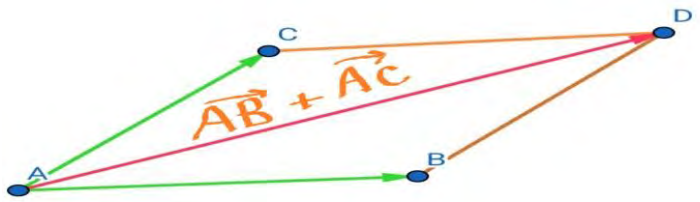
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ معناه: $ABDC$ متوازي أضلاع

البرهان الرياضي

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ ($\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ لأنّ الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع)

$=\overrightarrow{AD}$ (من علاقة شال: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$)

[1]: ميشال شال هو عالم رياضياتي وفيزيائي حيث إهتم بدوره بإبراز الأهمية التي تتضمنها التحويلات الهندسية المحافظة لبعض الخواص مثل الإستقامية والتوازي وقد نسبت إليه علاقة شال.



مركبتا شعاع :

المستوي مزود بمعلم $(0; I; J)$ مبدؤه النقطة 0 .

إذا كانت M نقطة من المستوي إحداثياتها $(x; y)$ فإنّ مركبتي الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما x و y ونكتب:

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

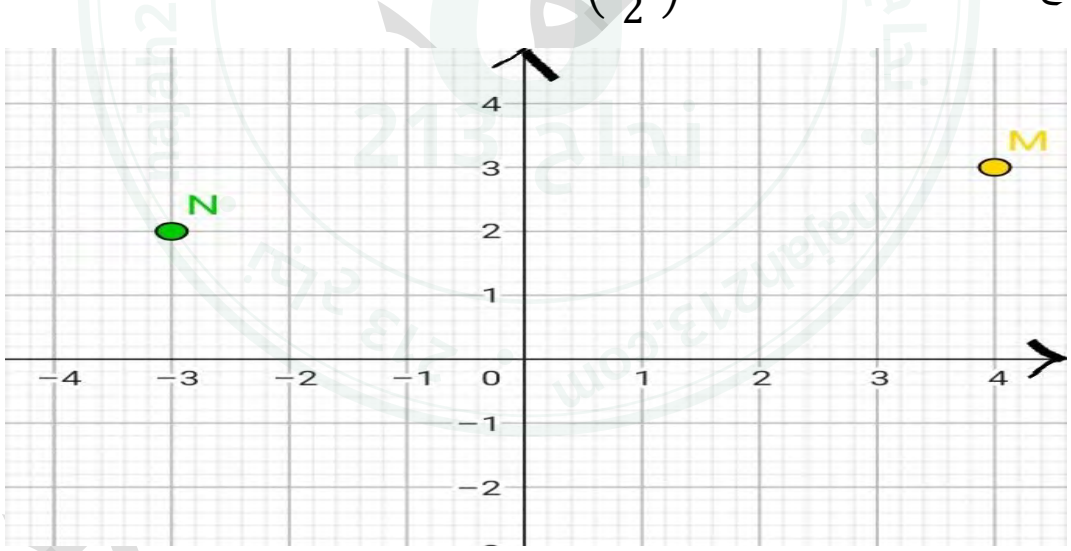
أمثلة:

إحداثيتا النقطة M هما 4 و3 ونكتب: $M(4; 3)$

مركبتا الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما 4 و3 ونكتب: $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

إحداثيتا النقطة N هما -3 و2 ونكتب: $N(-3; 2)$

مركبتا الشعاع هما -3 و 2 ونكتب: $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$



حساب مركبتي شعاع:

$A(x_A; y_A)$ و $B(x_{Bj} y_B)$ نقطتان من مستو مزود بمعلم.

مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

x هي الفاصلة و y هي الترتيبة

1

مثال: $A(-2;4)$ و $B(1;3)$

حساب مركبتي $\overrightarrow{AB}$: لدينا: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ فإنّ: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\3-4\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+2\\3-4\end{pmatrix}$ إذن: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

الشعاعان المتساويان:

$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ شعاعان من مستوي مزود بمعلم.

$\vec{U}=\vec{v}$ معناه: $x=x'$ و $y=y'$

حساب إحداثيتي منتصف قطعة:

A و B نقطتان من مستو مزود بمعلم بحيث $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ إحداثيتا M منتصف $[AB]$ هما:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \text{ و } y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

مثال:

$A(1;-2), B(3;0)$ نقطتان من المستوي.

M منتصف القطعة $[AB]$

$(x_M;y_M)$ إحداثيتا النقطة M بحيث :

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2,\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-2+0}{2}=-\frac{2}{2}=-1$$ إذن: $M(2;-1)$

حساب المسافة بين نقطتين في معلم متعامد ومتجانس:

في معلم متعامد ومتجانس إذا كانت: $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فإن المسافة بين النقطتين A و B هي: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

مثال: $A(3;-1), B(0;2)$ نقطتان من المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس حيث:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$AB=\sqrt{(0-3)^2+(2-(-1))^2}$$

$$AB=\sqrt{(-3)^2+(3)^2}$$

$$AB=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين رقم1 (من شهادة التعليم المتوسط 2025)

في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ تعطى النقط $R(3;-1)$ و$S(2;3)$ و$T(-2;2)$

1)-أحسب الأطوال ST, RT, RS

2)- ما نوع المثلث RST .بررجوابك

3)-أحسب إحداثيتي النقطة k صورة النقطة T بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{SR}$.

الحل النموذجي

1)- حساب الأطوال ST, RT, RS :

$$Rs = \sqrt{(x_s - x_R)^2 + (y_s - y_R)^2}$$

$$Rs = \sqrt{(2-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{17}$$

$$RT = \sqrt{(x_T - x_R)^2 + (y_T - y_R)^2}$$

$$RT = \sqrt{(-2-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}$$

$$ST = \sqrt{(x_T - x_s)^2 + (y_T - y_s)^2}$$

$$ST = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{17}$$

2)-تحديد نوع المثلث RST مع التبرير:

بما أنّ: $ST = RS = \sqrt{17}$ ----------(1)

وبالتالي المثلث RST متساوي الساقين.

ومن جهة أخرى :

$$RT^2 = \left(\sqrt{34}\right)^2 = 34$$

$$RS^2 + ST^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 + \left(\sqrt{17}\right)^2 = 34$$

وبالتالي : $RS^2 + ST^2 = RT^2$ ومنه حسب خاصية فيثاغورس العكسية فإنّ المثلث RST قائم في S

إذن المثلث RST قائم في S ومتساوي الساقين

3)- حساب إحداثيات K صورة T بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{SR}$:

لتكن $k(x_k; y_k)$

K صورة T بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{SR}$ معناه :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$\overrightarrow{SR} = T\vec{k}$

$\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix}3-2\\-1-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix}x_R-x_S\\y_R-y_S\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{TK}\begin{pmatrix}x_k-x_T\\y_k-y_T\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{TK}\begin{pmatrix}x_k+2\\y_k-2\end{pmatrix}$,

ومنه: $\begin{pmatrix}x_k+2=1\\y_k-2=-4\end{pmatrix}$ أي أنّ: $\begin{pmatrix}x_k=-1\\y_k=-2\end{pmatrix}$ إذن: $k(-1;-2)$

التمرين رقم2 (من شهادة التعليم المتوسط 2022)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0;\overrightarrow{OI};0\vec{J})$ حيث: $0I = O\bar{\jmath} = 1Cm$

لتكن النقط $A(3;2)$، $B(1,-2)$، $C(-3;0)$

1)- إذا كان: $AC = 2\sqrt{10}$ و $BC = 2\sqrt{5}$, ما نوع المثلث ABC.

2)- جد إحداثيتي النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$

3)- بيّن أنّ الرباعي $ABCD$ مربّع.

الحل النموذجي

1)- تعيين نوع المثلث ABC:

لدينا: $BC = 2\sqrt{5}, AC = 2\sqrt{10}$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-2)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

وبالتالي: $AB = BC = 2\sqrt{5}$

لدينا : $AB^2 + BC^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20 + 20 = 40$

و $AC^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 = 40$

وبمأنّ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ إذن حسب خاصية فيثاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم في B

ومتساوي الساقين لأنّ: $AB = BC = 2\sqrt{5}$

2)- إيجاد إحداثيتي النقطة D :

بمأنّ النقطة D صورة النقطة c بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$ فإنّ: $\overrightarrow{BA} = C\vec{D}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ولدينا: $A(3;2)$ و $B(1;-2)$ ومنه: $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}3-1\\2+2\end{pmatrix}$ أي: $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

نضع $D(x;y)$ ومنه: $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x+3\\y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ يعني: $\begin{matrix}x+3=2\\y=4\end{matrix}$ أي $\begin{matrix}x=-1\\y=4\end{matrix}$ إذن: $D(-1;4)$

3)- تبيان نوع الرباعي $ABCD$:

بمأنّ: $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ فإنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ولدينا المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين فهو إذن مربع .

التمرين رقم3(من شهادة التعليم المتوسط 2021)

M,L,k نقط من المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس حيث: $k(-1;4)$ و $L(-5;1)$ و $M(1;-3)$

1)- أحسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{Lk}$ ثم الطول LK

2)- أحسب إحداثيتي النقطة E منتصف القطعة $[LM]$

3)- أوجد إحداثيتي النقطة N بحيث يكون الرباعي $kLMN$ متوازي أضلاع

الحل النموذجي

1)- حساب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{Lk}$ ثم الطول LK

لدينا: $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}x_k-x_L\\y_k-y_L\end{pmatrix}$ أي: $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}-1+5\\4-1\end{pmatrix}$ ومنه: $\overrightarrow{Lk}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

ولدينا: $Lk=\sqrt{(4)^2+(3)^2}=\sqrt{25}=5$

2)- حساب إحداثيتي النقطة E منتصف القطعة $[LM]$

لدينا: $x_E=\frac{x_L+x_M}{2}$ $y_E=\frac{y_L+y_M}{2}$ ومنه: $x_E=\frac{-5+1}{2}$ $y_E=\frac{1+(-3)}{2}$ إذن: $E(-2;-1)$

3)- حساب إحداثيتي النقطة N بحيث يكون الرباعي $kLMN$ متوازي أضلاع

الرباعي $kLMN$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{MN}$ أي: $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x_N-1\\y_N+3\end{pmatrix}$

ومنه: $\begin{pmatrix}x_N-1=4\\y_N+3=3\end{pmatrix}$ أي: $\begin{matrix}x_N=5\\y_N=0\end{matrix}$ إذن $N(5;0)$

التمرين رقم4(من شهادة التعليم المتوسط 2020)

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(0;\overrightarrow{OI};0\overrightarrow{J})$

1)- علم النقط $A(1;2)$, $B(5;-2)$, $c(-1;-3)$

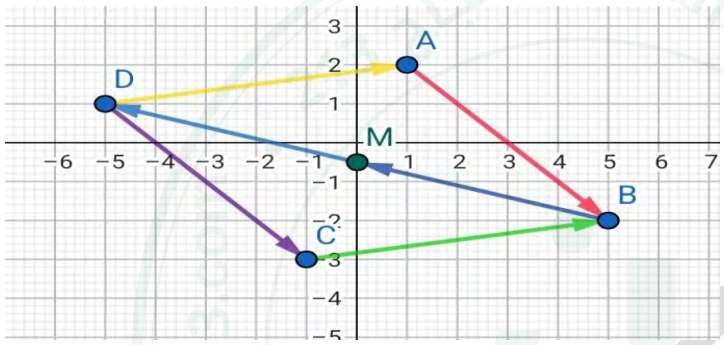
2)- أحسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{BC}$ ثم إستنتج الطول BC

3)- أحسب إحداثيتي النقطة M منتصف القطعة $[AC]$

4)- أوجد إحداثيتي النقطة D حيث يكون $B\overrightarrow{M} = \overrightarrow{MD}$ ثم إستنتج نوع الرباعي $ABcD$

الحل النموذجي

1)- تعليم النقط :



2)- حساب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{BC}$ ثم إستنتاج الطول BC

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-5\\-3-(-2)\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\-3+2\end{pmatrix}$ أي: $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$

$$BC=\sqrt{(-6)^2+(-1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$$

3)- إيجاد إحداثيتي النقطة M منتصف القطعة $[AC]$

$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}$ أي أنّ: $x_M=\frac{1+(-1)}{2}$ إذن $x_M=0$ و $y_M=-0,5$

$y_M=\frac{y_A+y_C}{2}$ $y_M=\frac{2+(-3)}{2}$

$$M(0;-0,5)$$

4)- تعيين إحداثيتي النقطة D حيث يكون $B\overrightarrow{M} = \overrightarrow{MD}$ ثم إستنتاج نوع الرباعي $ABcD$

$\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix}x_D-0\\y_D-(-0,5)\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}0-5\\-0,5-(-2)\end{pmatrix}$ أي: $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-5\\1,5\end{pmatrix}$

$B\overrightarrow{M} = \overrightarrow{MD}$ معناه : $\begin{cases}x_D=-5\\y_D+O_15=1,5\end{cases}$ أي $\begin{cases}x_D=-5\\y_D=1\end{cases}$ ومنه $D(-5;1)$

الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع لأن قطراه $[AC]$ و$[BD]$ متناصفان في النقطة M

التمرين رقم5(من شهادة التعليم المتوسط 2016)

1)- أنشئ المثلث EFG القائم في F حيث: $EF = FG = 4cm$

2)- أنشئ النقطتين D: صورة النقطة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{EF}$

C صورة النقطة E بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$

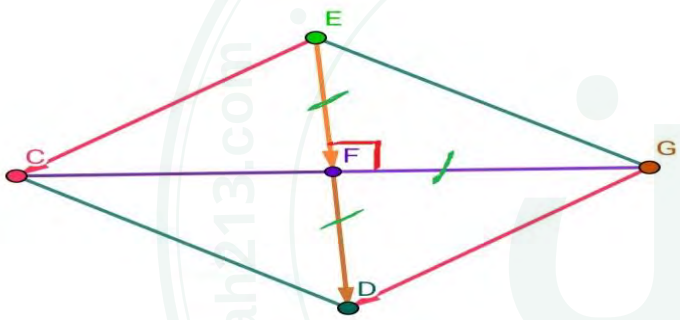
3)- بيّن أنّ الرباعي $EGDC$ مربع

أحسب مساحته

4)- ليكن الشعاع $\vec{U}$ حيث: $\vec{U} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FG}$, بين أنّ: $\vec{U} = \overrightarrow{ED}$

الحل النموذجي

1)- الإنشاء:



3)- التبيّين أنّ الرباعي $EGDC$ مربع وحساب مساحته

Cصورة النقطة E بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$ معناه: $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{EC}$ أي أنّ الرباعي $EGDC$ متوازي أضلاع

بمأنّ: $FG = EF = FD = 4Cm$ فإنّ: $FG = \frac{1}{2}ED$ فالمثلث EGD قائم في G

$[CG], [ED]$ قطرا متوازي الأضلاع $EGDC$ متعامدان فهو معين.

للمعين $EGDC$ زاوية قائمة $E\hat{G}D = 90^0$ فهو مربع

$$A = C^2 = EG^2 = EF^2 + FG^2$$

$$A = 4^2 + 4^2 = 32$$

وبالتالي مساحة المربع $EGDC$ هي $32cm^2$

4)-

$$\vec{U} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EC} + F\vec{G} = \left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}\right) + E\vec{C} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EC}$$

بمأنّ الرباعي $EGDC$ متوازي أضلاع فإنّ: $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED}$ وعليه: $\vec{U} = \overrightarrow{ED}$

najah213.com · نجاح 213

﴿المقطع التعليمي الخامس: الدالة التآلفية والخطية﴾

الموارد التعليمية:

التعريف بالدالة التآلفية

التمثيل البياني للدالة التآلفية

تناسبية التزايدات

جملة معادلتين من الدرجة الأولى وكيفية حلها

الدالة الخطية والتناسبية

الدوران

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الدالة التآلفية

تعريف:

a و b عددان، عندما نرفق بكل عدد x العدد $ax+b$

نقول إننا عرّفنا دالة تآلفية، يسمى العدد $ax+b$ صورة x بهذه الدالة حيث a و b هما معاملا هذه الدالة

الترميز :

يرمز لدالة تآلفية بإحدى الرموز h, g, f.....

إذا $ax+b$ هو صورة x بالدالة التآلفية f نكتب $f: x \mapsto ax+b$ ونكتب أيضا $f(x)=ax+b$

مثال

الدالة f حيث $f(x)=-3x+5$ هي دالة تآلفية معاملاها -3 و 5

صورة العدد 0 بالدالة f هي $f(0)$ أي 5 (نعوض قيمة 0 في عبارة الدالة f)

$$f(0)=-3\times 0+5$$
$$f(0)=5$$

صورة -1 بالدالة f هي $f(-1)$ أي 8 (نعوض قيمة -1 في عبارة الدالة f)

$$f(-1)=-3\times(-1)+5$$
$$f(-1)=3+5$$
$$f(-1)=8$$

حالات خاصة

إذا كان $b=0$ تصبح الدالة f من الشكل $f: x \to ax$ هي دالة خطية

إذا كان$a=0$ تصبح الدالة f من الشكل $f: x \mapsto b$ هي دالة ثابتة

التمثيل البياني لدالة تآلفية

خاصية

في معلم للمستوي، التمثيل البياني لدالة تآلفية هو $f: x \mapsto ax+b$ هو مستقيم

طريقة

لإنشاء المستقيم الممثل لدالة تآلفية في معلم يكفي تعيين نقطتين من هذا المستقيم ويمكن الإستعانة بجدول قيم

مثال

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

f هي الدالة التآلفية حيث: $f(x) = -x + 3$ و (d) تمثيلها البياني في معلم

لإنشاء (d) يكفي تعيين النقطتين A و B

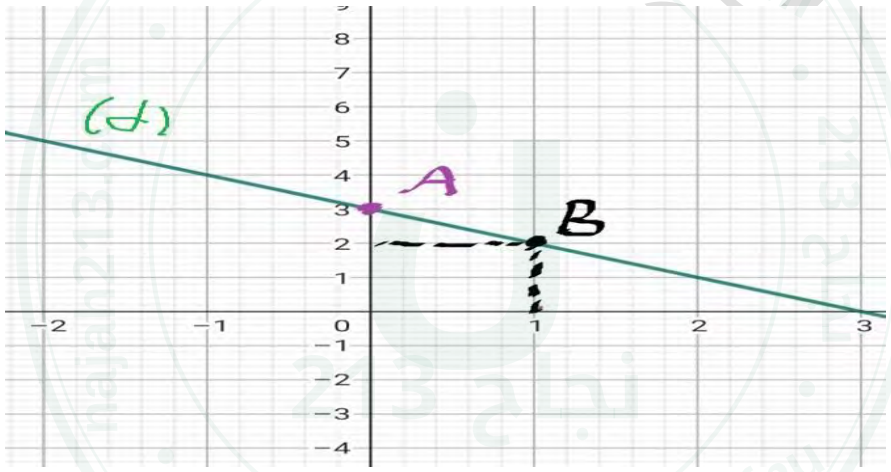
المستقيم (d) هو المستقيم (AB)

نبحث عن صورتي العددين 0 و1 فنجد:

$$f(0) = -0 + 3$$
$$f(0) = 3$$
$$A(0;3)$$

$$f(1) = -1 + 3$$
$$f(1) = 2$$
$$B(1;2)$$

x	0	1
$f(x)$	3	2
النقطة	$A(0;3)$	$B(1;2)$



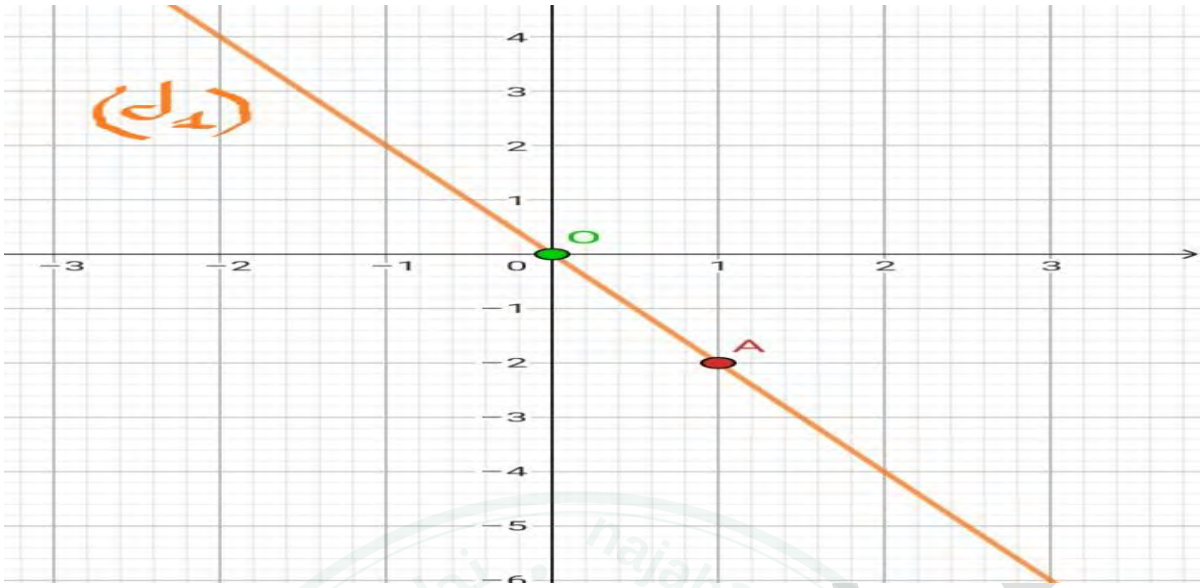
التمثيل البياني للدالة الخطية $f: x \mapsto -2x$ هومستقيم يشمل المبدأ 0

لإنشاء $((d_1))$ يكفي تعيين نقطة أخرى فقط مثلا النقطة $A(1;-2)$

$$f(0) = -2 \times (0) = 0, \quad f(1) = -2 \times (1) = -2$$

x	0	1
$f(x)$	0	-2
النقطة	$0(0;0)$	$A(1;-2)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com



تناسبيةالتزايدات

خاصية

f دالة تآلفية حيث $f(x) = ax + b$ مع a و b عددان معلومان, من أجل كل عددين x_1 و x_2

حيث $x_1 \neq x_2$ لدينا: $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

تستخدم هذه الخاصية لإيجاد عبارة الدالة التآلفية إنطلاقا من عددين وصورتهما

مثال :

عين الدالة التآلفية h حيث: $h(1) = 3 \ / \ h(-3) = -5$

إيجاد معامل التوجيه a

$$a = \frac{h(1)-h(-3)}{1-(-3)} = \frac{3-(-5)}{1-(-3)} = \frac{3+5}{1+3} = \frac{8}{4} = 2$$

معامل توجيه الدالة التآلفية h هي 2 ومنه: $h(x) = 2x + b$

إيجاد العدد b

$h(1) = 2 \times (1) + b = 3$ وبالتالي: $2 + b = 3$ أي أنّ: $b = 3 - 2$ إذن: $b = 1$

إذن العبارة الجبرية للدالة h هي: $h(x) = 2x + 1$

جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

نسمي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y كل جملة من الشكل :

najah213.com · نجاح 213

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث c', b', a', c, b, a أعداد معلومة

مثال:

$\begin{cases} 3x+y=-2 \\ 2x-5y=-7 \end{cases}$ جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y

حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين جبريا :

هو إيجاد الثنائيات $(x;y)$ التي تحقق المعادلتين في آن واحد من أجل ذلك نتبع إحدى الطرق التالية :

طريقة الحل بالتعويض :

مثال 1:حل الجملة

$$\begin{cases} x-3y=-8.....(1) \\ 2x+y=5.....(2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد:$x=-8+3y.....(3)$

نعوض قيمة x في المعادلة (2) فنجد :$2(-8+3y)+y=5$ أي :

$-16+6y+y=5$ ومنه :$6y+y=5+16$ وبالتالي :$7y=21$ إذن:$y=\frac{21}{7}$ أي أنّ:

$y=3$

نعوض قيمة y في المعادلة (3) فنجد :$x=-8+3\times 3$ أي:$x=1$

إذن الثنائية $(1;3)$ هي حل لهذه الجملة .

طريقة الحل بالجمع والتعويض :

مثال: حل الجملة:$\begin{cases} 2x+5y=-3.....(1) \\ 7x-3y=10.....(2) \end{cases}$

نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد $7-$ ونضرب طرفي المعادلة (2)في العدد 2 فنحصل على الجملة

$$\begin{cases} -14x-35y=21.....(3) \\ 14x-6y=20.....(4) \end{cases}$$

بجمع طرفي المعادلتين (3)و (4) طرفا لطرف فنجد:

$-14x-35y+14x-6y=21+20$ أي:$-41y=41$ وعليه:$y=-\frac{41}{41}$ ومنه:

$y=-1$

نعوض قيمة y في المعادلة (2) فنجد:$7x-3\times(-1)=10$ أي:$7x+3=10$ وعليه :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$7x = 10 - 3$ ومنه: $7x = 7$ أي أنّ: $x = \frac{7}{7}$ وبالتالي: $x = 1$

إذن الثنائية $(1; -1)$ هي حل لهذه الجملة .

تفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانيا :

مثال :

نعتبر الجملة: $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

لتفسير حل هذه الجملة بيانيا ,نعبر عن y بدلالة x في كلتا المعادلتين ونجد:

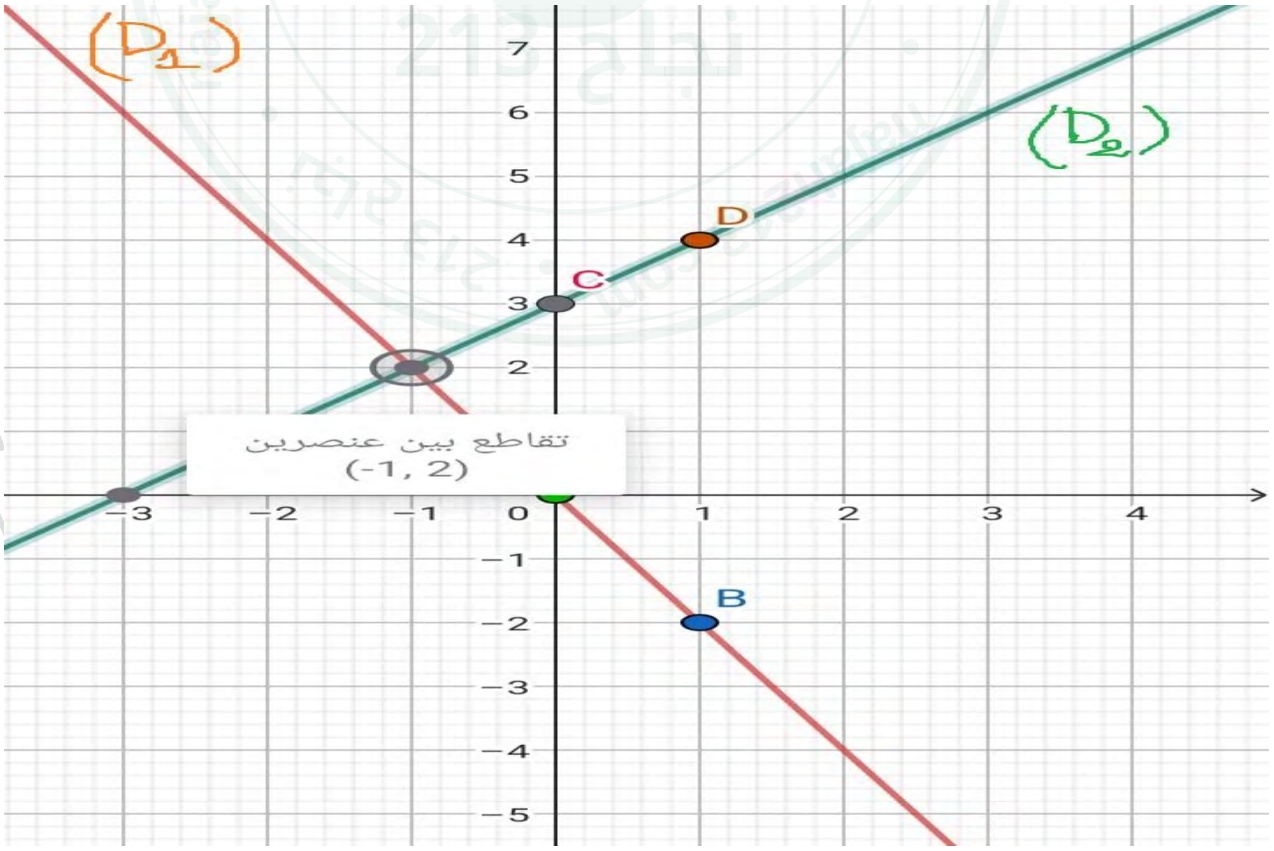
$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -2x \end{cases}$ نسمي (D_1) و (D_2) المستقيمين الممثلين للدالتين التآلفيتين:

$f(x) = -2x$
$g(x) = x + 3$ لإنشاء (D_1) و (D_2) نستعين بالجدولين الآتيتين :

x	0	1
$f(x)$	0	-2

x	0	1
$g(x)$	3	4

حل الجملة هو الثنائية المشكلة من إحداثيتي نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) وبقراءة بيانية نجد: $(-1; 2)$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الدالة الخطية والتناسبية :

✓ جدول قيم دالة خطية هوجدول فيه أعداد السطر الثاني هي صورة أعداد السطر الأول بالدالة الخطية.
✓ جدول قيم دالة خطية هوجدول تناسبية.
✓ معامل الدالة الخطية هو معامل التناسبية لهذا الجدول

مثال:

f هي الدالة الخطية المعرّفة بالشكل:$f(x) = 2x$

x	1	2	3	
$f(x)$	2	4	6	$\times 2$

2 هو معامل التناسبية لهذا الجدول وهوأيضا معامل الدالة الخطية

تطبيقات التناسبية

الدوال الخطية والنسب المئوية

تخفيض x ب $t\%$ يعني ضرب x في $1-\frac{t}{100}$	زيادة x ب$t\%$ يعني ضرب x في $1+\frac{t}{100}$	أخذ $t\%$ من x يعني ضرب x في $\frac{t}{100}$	
$x \mapsto \left(1-\frac{t}{100}\right)x$	$x \mapsto \left(1+\frac{t}{100}\right)x$	$x \mapsto \frac{t}{100}x$	الدالة الخطية المرفقة

✓ أخذ 5% من x يعني ضرب x في $0,05$ والدالة المرفقة هي $x \mapsto 0,05x$
✓ زيادة 5% من x يعني ضرب x في $1,05$ والدالة المرفقة هي $x \mapsto 1,05x$
✓ تخفيض 5%من x يعني ضرب x في $0,95$ والدالة المرفقة هي $x \mapsto 0,95x$

﴿تمارين من شهادة التعليم المتوسط﴾

التمرين رقم 1من شهادة التعليم المتوسط دورة 2025:

f دالة تآلفية،تمثيلها البياني يشمل النقطتين:$H(2;5)$ و$k(3;8)$

1)- أوجد العبارة الجبرية للدالة f

2)- لتكن الدالة g المعرفة بالعبارة:$g(x) = 5x - 7$

أ)-أحسب $g(1)$

ب)- بين حسابيا أنّ التمثيلين البيانيين للدالتين f و g يتقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثيتيها

﴿الحل النموذجي﴾

1)- إيجاد العبارة الجبرية للدالة f

f دالة تآلفية عبارتها الجبرية من الشكل $f(x) = ax + b$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

إيجاد a:

$$a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{8-5}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$$

لدينا التمثيل البياني للدالة f يشمل H معناه:

$$f(2) = 5$$

لدينا: $f(x) = 3x + b$ ومنه:

$$f(2) = 3 \times 2 + b$$
$$5 = 6 + b$$
$$b = -1$$

ومنه للعبارة الجبرية للدالة f هي: $f(x) = 3x - 1$

2)- حساب $g(1)$:

$$g(x) = 5x - 7$$

لدينا:

$$g(1) = 5 \times 1 - 7$$
$$g(1) = -2$$

3)- إثبات أنّ التمثيلان البيانيان للدالتين g و f يتقاطعان في نقطة وحيدة

لإيجاد نقطة تقاطع الدالتين g و f يكفي حل المعادلة $f(x) = g(x)$

$$3x - 1 = 5x - 7$$
$$2x = 6$$

معناه:

$$x = \frac{6}{2}$$
$$x = 3$$

نعوض قيمة $x = 3$ في أحد العبارتين الجبريتين f و g لإيجاد قيمة y

$$f(3) = 3 \times 3 - 1 = 9 - 1 = 8$$

إذن: نقطة تقاطع التمثيلان البيانيان للدالتين g و f هي: $N\ (3; 8)$

التمرين رقم 2من شهادة التعليم المتوسط دورة 2023

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

المستقيم (d) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة بالعبارة $f(x) = -2x + 3$

1)- $A(x_A; 1)$, $B(2; y_B)$ نقطتان من (d), أحسب كلا من x_A و y_B

2)- لتكن النقطتان $c(1; 2)$, $D(-1; -2)$ بين أنّ النقط $D; 0; C$ في إستقامية

3)-أنشىء التمثيل البياني للدالة f

الحل النموذجي

1)- حساب x_A وحساب y_B:

$-2x_A + 3 = 1$ وبالتالي: $-2x_A = -2$ ومنه: $x_A = 1$

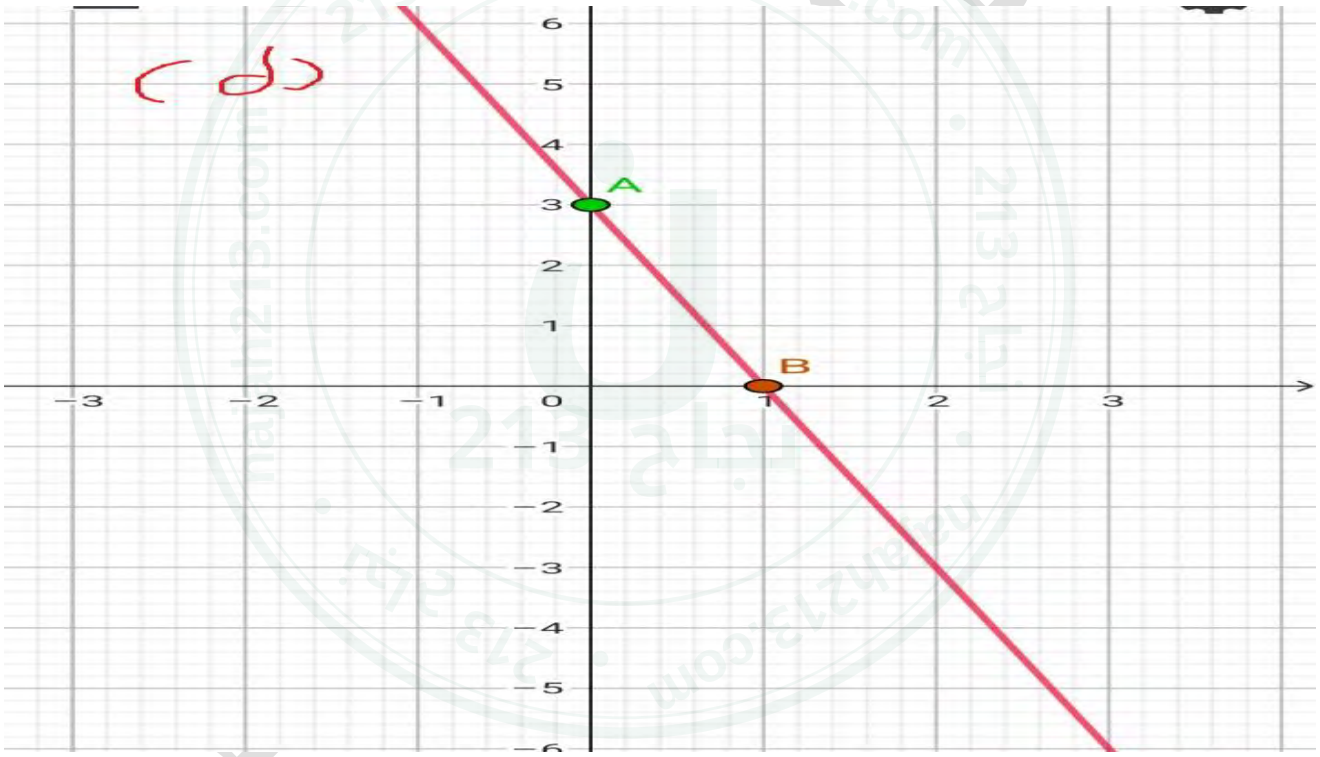
$f(2) = -2 \times 2 + 3 = y_B$ ومنه: $y_B = -1$

2)-إثبات أنّ النقط $D, 0, C$ في إستقامية :

لدينا: $c(1;2)$ ومنه: $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ولدينا: $D(-1;-2)$ ومنه: $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{DO}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DO}$

ويعني أن O منتصف $[DC]$ إذن: النقط $D, 0\ C,$ في إستقامية

3)- التمثيل البياني للدالة f :



التمرين رقم 3من شهادة التعليم المتوسط دورة 2016

f دالة تآلفية تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ يشمل النقطتين $A(2;5)$ و $B(-1;-4)$

1)- بيّن أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية f هي: $f(x) = 3x - 1$

2)-لتكن النقطة $c(4;11)$ من المستوي, هل النقط C, B, A على إستقامة واحدة.

3)- أوجد العدد الذي صورته 29 بالدالة f .

najah213.com · نجاح 213

الحل النموذجي

1)- إثبات أنّ $f(x) = 3x - 1$

بمأنّ التمثيل البياني للدالة f يشمل النقطتين $A(2;5)$ و$B(-1;-4)$ فإن: $f(2) = 5$ و

$f(-1) = -4$ وعليه: $a = \frac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \frac{5+4}{3} = 3$

$f(x) = 3x + b$

$f(2) = 3 \times 2 + b = 5$

$f(2) = 6 + b = 5$

$6 + b = 5$

وبالتالي: $b = 5 - 6$

$b = -1$

ومنه $f(x) = 3x - 1$

2)- معرفة هل النقط C, B, A على إستقامة واحدة.

$f(4) = 3 \times 4 - 1 = 12 - 1 = 11$ وعليه $C \in (AB)$ وبالتالي النقط C, B, A على إستقامة واحدة

3)- إيجاد العدد الذي صورته 29 بالدالة f .

لدينا: $f(x) = 29$ ومنه: $3x - 1 = 29$ وبالتالي: $3x = 30$ أي: $x = \frac{30}{3}$ ومنه: $x = 10$

وبالتالي العدد الذي صورته 29 بالدالة f هو 10.

التمرين رقم 4من شهادة التعليم المتوسط دورة 2008

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$

1)- علم النقطتين $A(0;4)$ و$B(1;0)$

2)- حدد العبارة الجبرية للدالة التآلفية f التي تمثيلها البياني هو المستقيم (AB)

3)- ليكن المستقيم (Δ)التمثيل البياني للدالة g حيث: $g(x) = \frac{2}{3}x + 2$

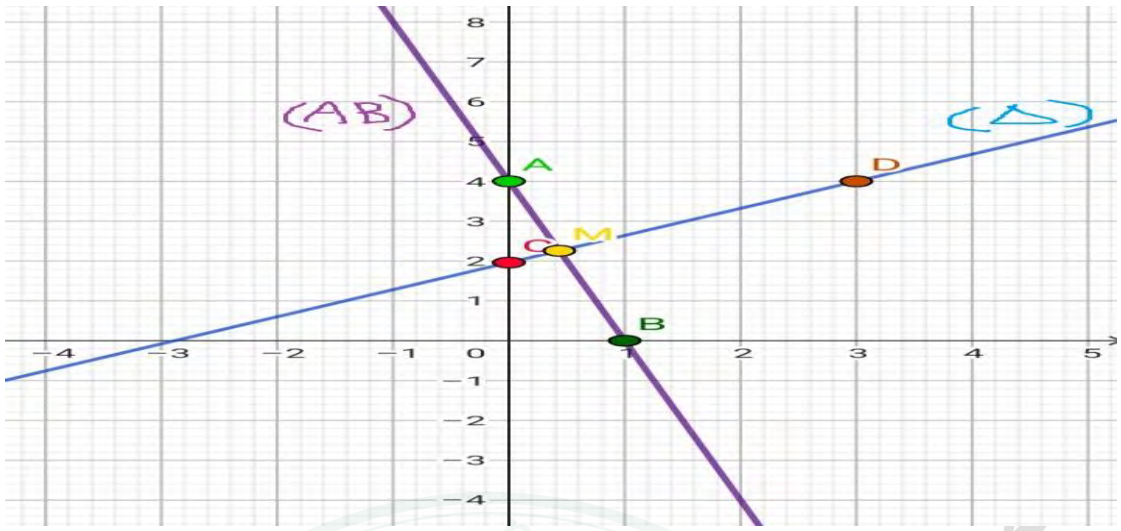
- أنشىء (Δ)

- أوجد إحداثيتي M نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (Δ) .

الحل النموذجي

1)- تعليم النقط:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com



2)- تحديد العبارة الجبرية للدالة التآلفية:

$f(x) = ax + b$ حيث :

$f(0) = a \times 0 + b = 4$
$b = 4$

$f(1) = a \times 1 + b = 0$
$a + b = 0$
$a + 4 = 0$
$a = -4$

إذن: $f(x) = -4x + 4$

4)- إيجاد إحداثيتي النقطة M:

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (Δ) يكفي حل المعادلة: $f(x) = g(x)$ أي أنّ:

$$-4x + 4 = \frac{2}{3}x + 2$$

$$-4x - \frac{2}{3}x = -4 + 2$$

$$\frac{-12x-2x}{3} = -2$$

$$\frac{-14x}{3} = -2$$

$$-14x = (-2) \times 3$$

وبالتالي: $-14x = -6$ إذن: $x = \frac{-6}{-14}$ أي أن: $x = \frac{3}{7}$

نعوض قيمة x في أحد المعادلتين الجبريتين فنجد قيمة y

$$y = -4\left(\frac{3}{7}\right) + 4$$

$$y = \frac{-12}{7} + 4$$

أي أنّ: $\frac{16}{7}$ إذن: $y = \frac{-12+4\times7}{7} = \frac{-12+28}{7} = \frac{16}{7}$

. $M\left(\frac{3}{7}; \frac{16}{7}\right)$

1

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الدوران:

تعريف:

تحويل شكل بالدوران هو تدويره بزاوية معينة حول نقطة ثابتة وفي إتجاه معين.

ملاحظة:يتميز الدوران بزاوية وإتجاه معين ومركز هو النقطة التي دورنا حولها

إصطلاح :يسمى الإتجاه المعاكس لإتجاه عقارب الساعة الإتجاه المباشر أو الإتجاه الموجب

كمايسمى الإتجاه الآخر الإتجاه الغير مباشر أو الإتجاه السالب



الإتجاه المباشر الإتجاه الغير مباشر

ملاحظة :

نأخذ عامة الإتجاه الموجب كإتجاه للدوران مالم يذكر عكس ذلك .

﴿تمارين من شهادة التعليم المتوسط﴾

التمرين رقم 1:من شهادة التعليم المتوسط دورة جوان 2009

$[AB]$ قطعة مستقيم طولها $6cm$

1)-أنشىء النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وقيس زاويته 90^0 في إتجاه عكس عقارب الساعة

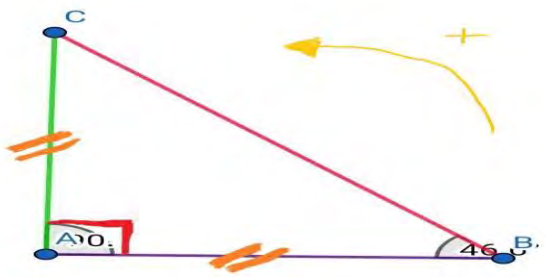
2)- مانوع المثلث ABC (برر جوابك)

3)- أوجد الطول BC

﴿الحل النموذجي﴾

1)- الإنشاء :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com



2)- المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين (من تعريف الدوران)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

3)- $BC^2 = 36 + 36 = 72$ إذن: $BC = 6\sqrt{2}Cm$

$$BC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

التمرين رقم 2(من شهادة التعليم المتوسط 2010)

$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي

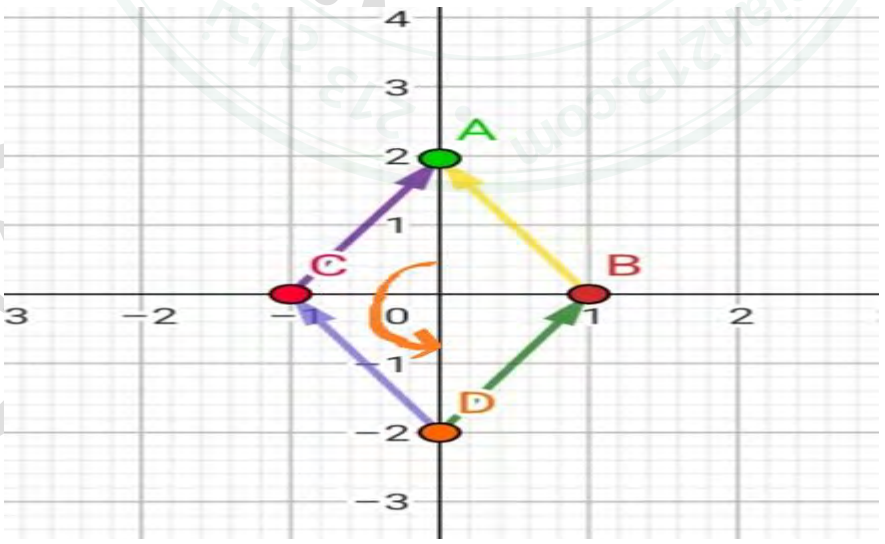
1)- علّم النقط: $A(0;2), B(1;0), c(-1;0)$

2)- مانوع المثلث ABC .علل

3)- عين إحداثيا النقطة D صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته 180^0 ثم إستنتج نوع الرباعي $ABDC$

الحل النموذجي

1)-تعليم النقط :



2)- المثلث ABC متساوي الساقين لأن: $(A0)$ هو محور القطعة $[BC]$

$(OA) \perp (BC)$ و $OC = 0B = 1Cm$;

3)- D صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته 180^0 أي: $OA = OD$ و $A\hat{O}D =$
180^0 ومنه: $D(0; -2)$

$ABDC$ معين لأن قطراه متعامدان ومتناصفان في النقطة O.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

﴿قائمة المصادر والمراجع﴾

الكتب:

[1]: شرابطة بلقاسم وآخرون، كتاب الرياضيات للسنة 3متوسط، الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية ONPS، الإيداع القانوني (السداسي الثاني 2017)

[2]: شرابطة بلقاسم وآخرون، كتاب الرياضيات للسنة 4متوسط، منشورات الشهاب، باتنة (الجزائر) 2019،

[3]: سلاسل التفوق في الرياضيات للأستاذة جبلاحي حليمة من الموقع الإلكتروني:

(

[4]: فاروق عبد المعطي، فيثاغورس فيلسوف علم الرّياضيات، الطبعة الأولى، دار الكتب العلمية، بيروت (لبنان) ،1414ه/1994م.

[5]: محمد محمود إبراهيم موسى، أساسيات البرمجة بلغة الجافا، جامعة الزعيم الأزهري، كلية علوم الحاسوب وتقنية المعلومات.

[6]: الموقع الإلكتروني:

https://www.facebook.com/photo.php?fbid=811435548932626&id=373577506051768&set=a.528519310557586(المصدر)

[7]: الموقع الإلكتروني:https://www.hsaina.com/3college/math/%D8%AF%D8%B1%D8%B3-%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9-%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3.html#google_vignette

[8]: مذكرات الرياضيات للسنة الرابعة متوسط – الجيل الثاني، إعداد الأستاذ: شعيب قبايلي التنزيل عبر الموقع الإلكتروني:dzexams-docs-4am-905984.pdf .

[9]:
https://www.ibelieveinsci.com/%D8%A7%D9%84%D9%81%D9%8A%D9%84%D8%B3%D9%88%D9%81-%D8%A7%D9%84%D8%A5%D8%BA%D8%B1%D9%8A%D9%82%D9%8A-/%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3

[[10]: مذكرات الرياضيات للسنة الرابعة متوسط للأستاذ شعيب قبايلي .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

1

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

1

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

﴿قائمة المصادر والمراجع﴾

الكتب:

[1]: شرابطة بلقاسم وآخرون، كتاب الرياضيات للسنة 3متوسط، الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية ONPS، الإيداع القانوني (السداسي الثاني 2017)

[2]: شرابطة بلقاسم وآخرون، كتاب الرياضيات للسنة 4متوسط، منشورات الشهاب، باتنة (الجزائر) 2019،

[3]: سلاسل التفوق في الرياضيات للأستاذة جبلاحي حليمة من الموقع الإلكتروني:

( )

[4]: فاروق عبد المعطي، فيثاغورس فيلسوف علم الرّياضيات، الطبعة الأولى، دار الكتب العلمية، بيروت (لبنان) ،1414ه/1994م.

[5]: محمد محمود إبراهيم موسى، أساسيات البرمجة بلغة الجافا، جامعة الزعيم الأزهري، كلية علوم الحاسوب وتقنية المعلومات.

[6]: الموقع الإلكتروني:

https://www.facebook.com/photo.php?fbid=811435548932626&id=373577506051768&set=a.528519310557586(المصدر)

[7]: الموقع الإلكتروني:https://www.hsaina.com/3college/math/%D8%AF%D8%B1%D8%B3-%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9-%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3.html#google_vignette

[8]: مذكرات الرياضيات للسنة الرابعة متوسط – الجيل الثاني، إعداد الأستاذ: شعيب قبايلي التنزيل عبر الموقع الإلكتروني:dzexams-docs-4am-905984.pdf .

[9]:
https://www.ibelieveinsci.com/%D8%A7%D9%84%D9%81%D9%8A%D9%84%D8%B3%D9%88%D9%81-%D8%A7%D9%84%D8%A5%D8%BA%D8%B1%D9%8A%D9%82%D9%8A-/%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3

[[10]:مذكرات الرياضيات للسنة الرابعة متوسط للأستاذ شعيب قبايلي .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً