najah213.com · نجاح 213



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

◄ التمرين:

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+1}{1-x}$ ، حيث α و β عددين حقيقين، و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

◆ عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند الـ "0" والنقطة $A(2;-3)$ تنتمي إليه

II) نضع فيما يلي: $\alpha=1$ و $\beta=-1$:

1. احسب: $\lim\limits_{x\to 1^>} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^<} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا
2. احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. أ/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{1-x}$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

4. أ/ بيّن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها

5. أ/ عيّن إحداثيات ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=1$

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

6. ارسم كل من (Δ) و (C_f)
7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلتين $\dfrac{1}{1-x}=x+m\ldots(E)$

و $f(x)+x=m\ldots(E')$

III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $h(x)=f(|x|)$

1. ادرس شفعية الدالة h
2. وضّح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه.

الخليل للرياضيات
قويسم
www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

◄ حل مقترح:

I) تعيين α و β :

لدينا: f **تقبل قيمة حدية عند** 0 **معناه:** $f'(0)=0$

نعيّن أولا $f'(x)$**:**

$$f'(x)=\frac{(2\alpha x+\beta)(1-x)-(-1)(\alpha x^2+\beta x+1)}{(1-x)^2}$$

لدينا: $f'(0)=0$ **ومنه:**

$$\frac{(2\alpha(0)+\beta)(1-0)-(-1)(\alpha(0)^2+\beta(0)+1)}{(1-0)^2}=0\Longrightarrow\beta+1=0$$

$$\Longrightarrow\boxed{\beta=-1}$$

ولدينا: $f(2)=-3$ **، ومنه:**

$$\frac{\alpha(2)^2+\beta(2)+1}{1-2}=-3\Longrightarrow 4\alpha+2\beta+1=3$$

$$\Longrightarrow 4\alpha+2\beta=2$$

$$\Longrightarrow 4\alpha=4$$

$$\Longrightarrow\boxed{\alpha=1}$$

ومنه: $\boxed{f(x)=\frac{x^2-x+1}{1-x}}$

II) نضع فيما يلي: $\alpha=1$ **و** $\beta=-1$

❶ **حساب:** $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}f(x)$ **و** $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}f(x)$ **:**

- $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) **يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار** $-\infty$ **معادلته** $x=1$

- $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) **يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار** $+\infty$ **معادلته** $x=1$

❷ **حساب:** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **:**

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)$

$$=-\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=+\infty$

❸ **أ/ تعيين الأعداد الحقيقية** a **،** b **و** c **حيث:** $f(x)=ax+b+\frac{c}{1-x}$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{1-x}$$

$$=\frac{(ax+b)(1-x)+c}{1-x}$$

$$=\frac{ax-ax^2+b-bx+c}{1-x}$$

$$=\frac{-ax^2+(a-b)+b+c}{1-x}$$

www.dzexams.com
الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = -1 \\ b + c = 1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$ وعليه: $\boxed{f(x) = -x + \frac{1}{1-x}}$

ب/ استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (-x)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[-x + \frac{1}{1-x} - (-x)\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{1-x}\right]$$
$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته : $y_{(\Delta)} = -x$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{1-x}$$

لدينا: $1 - x = 0$ معناه: $x = 1$ ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$+$	$-$	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

❹ أ/ تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(1-x) - (-1)(x^2 - x + 1)}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{2x - 2x^2 - 1 + x + x^2 - x + 1}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(1-x)^2 > 0$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(2-x)$:

لدينا:

$$x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ 2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

❺ أ/ ايجاد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$:

نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم (Δ): نجد $y = -1$

ومنه: $\omega(1; -1)$

ب/ تبيين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$

الخليل للرياضيات
www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

معناه: $x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ معناه: $x<1$ أو $x>1$

معناه: $(-x)<-1$ أو $(-x)>-1$ معناه: $(2(1)-x)<1$ أو $(2(1)-x)>1$

معناه: $(2(1)-x)\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ معناه: $(2(1)-x)\in D_f$

• ولدينا:

$$f(2(1)-x)+f(x)=-(2-x)+\frac{1}{1-(2-x)}-x+\frac{1}{1-x}$$
$$=-2+x+\frac{1}{-1+x}-x+\frac{1}{1-x}$$
$$=-2-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x}$$
$$=-2=2(-1)$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha-x\in D_f \\ f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha+x)\in D_f \\ (\alpha-x)\in D_f \\ f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta \end{cases}$$

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

إذا وُجد مماس لـ (C_f) يشمل $\omega(1;-1)$ معناه يوجد $a\in\mathbb{R}-\{1\}$ يحقق:

$$f'(a)(x_\omega-a)+f(a)=y_\omega$$

لدينا:

$$f'(a)(x_\omega-a)+f(a)=y_\omega \Rightarrow f'(a)(1-a)+f(a)=-1$$
$$\Rightarrow \frac{a(2-a)}{(1-a)^2}(1-a)+\frac{a^2-a+1}{1-a}=-1$$
$$\Rightarrow \frac{a(2-a)}{(1-a)^2}-\frac{a^2(2-a)}{(1-a)^2}+\frac{a^2-a+1}{1-a}=-1$$
$$\Rightarrow \frac{a(2-a)}{(1-a)^2}-\frac{a^2(2-a)}{(1-a)^2}+\frac{(a^2-a+1)(1-a)}{(1-a)^2}=-1$$
$$\Rightarrow \frac{2a-a^2-2a^2+a^3+a^2-a^3-a+a^2+1-a}{(1-a)^2}=-1$$
$$\Rightarrow \frac{-a^2+1}{(1-a)^2}=-1$$
$$\Rightarrow \frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)^2}=-1$$
$$\Rightarrow \frac{1+a}{1-a}=-1$$
$$\Rightarrow 1+a=-1+a$$
$$\Rightarrow 1=-1$$

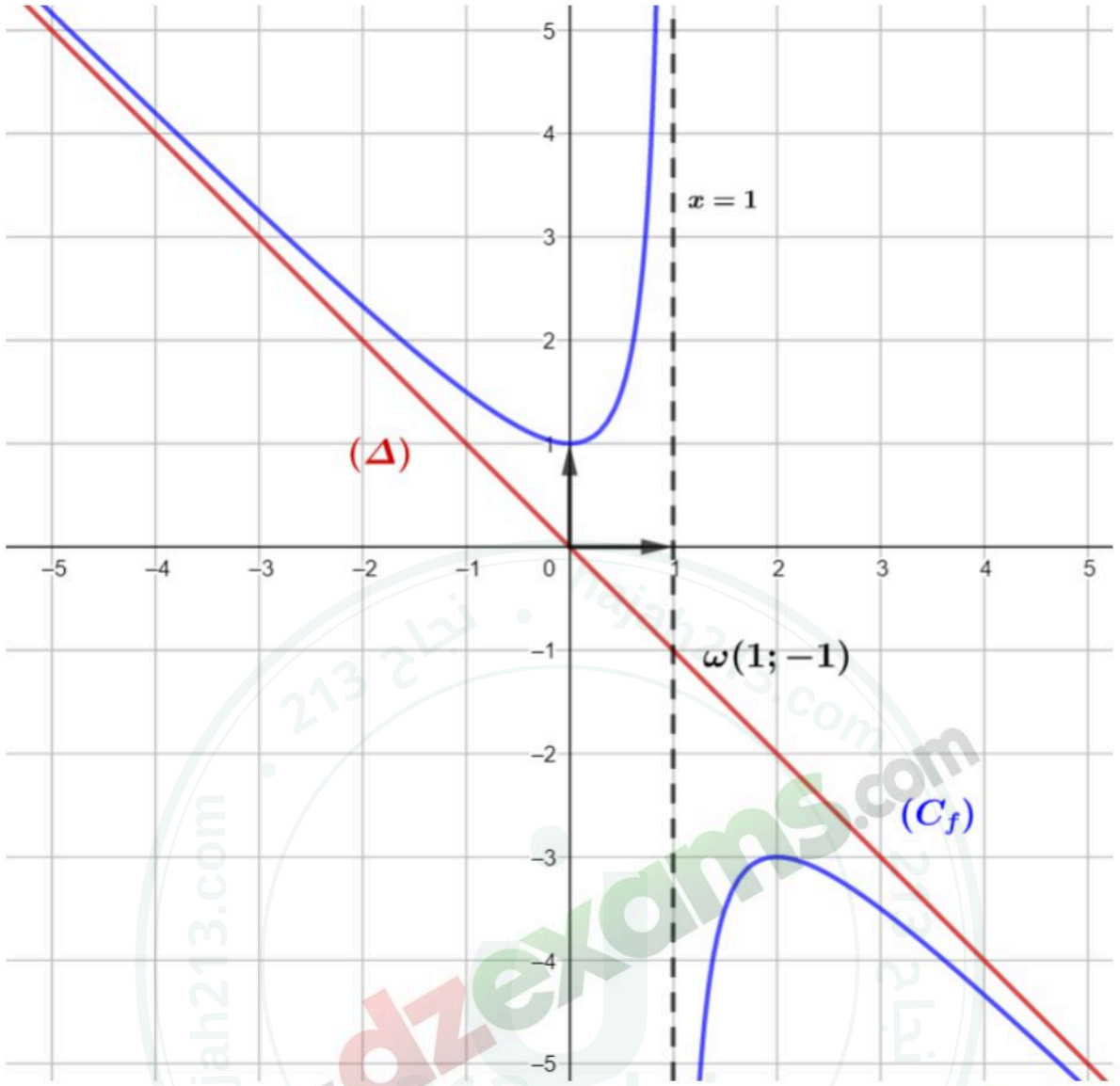
وجدنا $1\neq -1$ وهذا تناقض، وعليه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

❻ رسم كل من (Δ) و (C_f) :

الخليل للرياضيات
www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



❼ المناقشة البيانية:

1) المناقشة البيانية لحلول المعادلة (E):

$$\frac{1}{1-x} = x + m \Longrightarrow \frac{1}{1-x} - x = m$$
$$\Longrightarrow f(x) = m$$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = x$ ، وهي:

لما	$m \in]-\infty;-3[$	للمعادلة حلان موجبان تماما
لما	$m = -3$	للمعادلة حل مضاعف موجب تماما
لما	$m \in]-3;1[$	المعادلة لا تقبل حلولا
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما
لما	$m \in]1;+\infty[$	للمعادلة حل موجب تماما وحل سالب تماما

2) المناقشة البيانية لحلول المعادلة (E'):

$$f(x) + x = m \Longrightarrow f(x) = -x + m$$

حلول المعادلة (E') هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -x + m$ ، وهي:

لما	$m \in]-\infty;-1[$	للمعادلة حل موجب تماما
لما	$m = -1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجب تماما
لما	$m \in]-1;0[$	للمعادلة حل موجب تماما

الخليل للرياضيات
www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

لما	$m = 0$	المعادلة لا تقبل حلولا
لما	$m \in]0;1[$	للمعادلة حل سالب تماما
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما
لما	$m \in]1;+\infty[$	للمعادلة حل موجب تماما

(III

❶ دراسة شفعية الدالة h:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة h زوجية

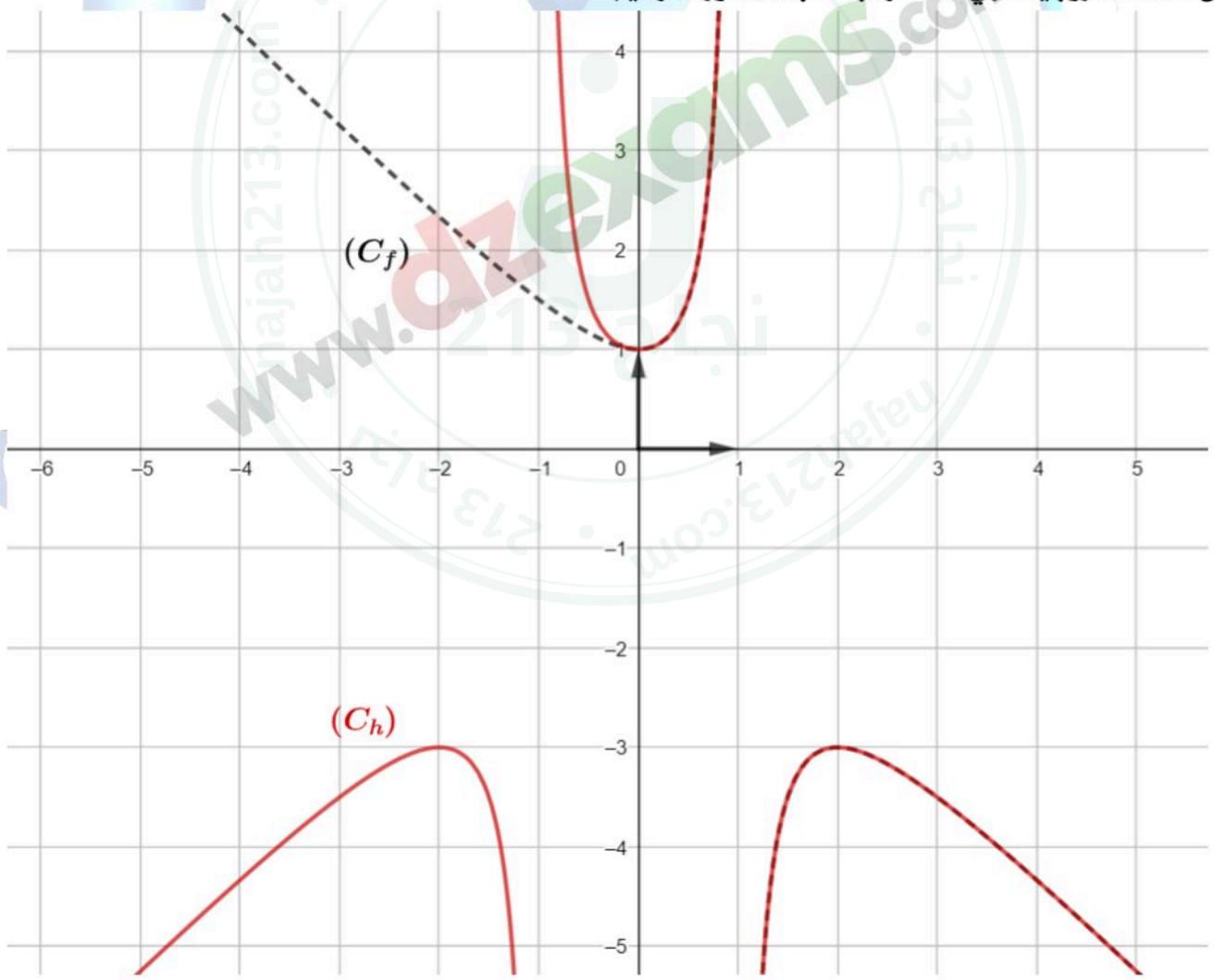
❷ توضيح كيف يمكن المنحنى (C_h) :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|)$$
$$= \begin{cases} f(x) & ; \quad x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(-x) & ; \quad x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0] \end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.



الخليل للرياضيات

بالتوفيق

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com