najah213.com · نجاح 213




سنة ثالثة ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | تقني رياضي | رياضيات | تسيير واقتصاد

# مسائل 22 مسألة

# في الدوال العددية

## مرفقة بحلول مفصلة

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[ 15 أكتوبر 2021 ]

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# المسائل:

## فهرس المحتويات:


المسألة رقم 01 : المسألة الحل
المسألة رقم 02 : المسألة الحل
المسألة رقم 03 : المسألة الحل
المسألة رقم 04 : المسألة الحل
المسألة رقم 05 : المسألة الحل
المسألة رقم 06 : المسألة الحل
المسألة رقم 07 : المسألة الحل
المسألة رقم 08 : المسألة الحل
المسألة رقم 09 : المسألة الحل
المسألة رقم 10 : المسألة الحل
المسألة رقم 11 : المسألة الحل
المسألة رقم 12 : المسألة الحل
المسألة رقم 13 : المسألة الحل
المسألة رقم 14 : المسألة الحل
المسألة رقم 15 : المسألة الحل
المسألة رقم 16 : المسألة الحل
المسألة رقم 17 : المسألة الحل
المسألة رقم 18 : المسألة الحل
المسألة رقم 19 : المسألة الحل
المسألة رقم 20 : المسألة الحل
المسألة رقم 21 : المسألة الحل
المسألة رقم 22 : المسألة الحل


♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥

## 01 المسـألة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

❶

أ/ احسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة $f$، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷

أ/ عين الأعداد الحقيقة $a, b, c$ بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + b}{(x-1)^2}$$

ب/ مبررا إجابتك، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني $(C_f)$ والمستقيم $(d)$ الذي معادلته $y = x - 2$؟

ج/ حدد وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(d)$، ولتكن $A$ نقطة تقاطعهما.

❸ بين انه يوجد مماس $(T)$ لـ $(C_f)$ مواز للمستقيم $(d)$.

❹ بيّن أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-\infty; 1[$، استنتج قيمة مقربة إلى $10^{-2}$ للعدد $\alpha$.

❺ مثّل بيانيا المستقيم $(d)$ والمماس $(T)$ والمنحنى $(C_f)$.

❻ استنتج بيانيا حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث $m$ وسيط حقيقي.

❼

أ/ نريد إيجاد نتيجة السؤال ❻ باستعمال الحساب، بيّن أن فواصل نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيم الذي معادلته $y = x + m$ هي حلول المعادلة $(E)$ حيث:

$$(E): (m+2)x^2 - (2m+7)x + m + 4 = 0$$

ب/ جد حسب قيم $m$ حلول المعادلة $(E)$.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## المسـألة رقم: 02

مشاهـــدة الحـــل

**I)** لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$.
2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $\alpha \in ]-1.48; 1.47[$
   ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

**II)** نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1.
   أ/ احسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

   ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ أن:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

   ثم ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها.

2.
   أ/ بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

   ب/ ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$.

3. بين أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
4. مثل بيانيا المستقيم $(\Delta)$ والمنحني $(C_f)$.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# 03 المسـألة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

**I)** $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بجدول تغيراتها كما يلي:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $5$ | ↗ | $+\infty$ | ⋮ | $0$ | ↗ | $1$ | ⋮ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حيث: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}$
2. عيّن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$، ثم فسر النتيجتين هندسيا.
3. عيّن معادلة المماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $(-2)$.
4. أجب بصحيح أم خطأ مع التبرير:

أ/ $f(2)>f(1)$ ب/ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}-\{-1\}$. ج/ $f'(1)>0$

5. عيّن إشارة الدالة $f$

**II)** نضع فيما يلي: $a=-1$ و $b=1$ و $c=1$:

1. أ/ بيّن أنّه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f(x)=-x+2-\frac{1}{x+1}$
   ب/ استنتج أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.
   ج/ ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.
2. أ/ عيّن إحداثيات النقطة $\omega$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=-1$.
   ب/ بيّن أن النقطة $\omega$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ .
   ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى $(C_f)$ يشمل النقطة $\omega$ .
3. ارسم كل من $(\Delta)$ و $(C_f)$ .
4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=-x+m$

**III)** لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=[f(x)]^2$.

1. عيّن نهايات الدالة $g$ عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. احسب: $g(\alpha)$ ، $g(\beta)$، $g(0)$ و $g(-2)$
3. باستعمال مشتق مركب دالتين، احسب $g'(x)$
4. استنتج تغيرات الدالة $g$ دون دراسة تغيراتها.

**IV)** لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $h(x)=f(|x|)$

1. ادرس شفعية الدالة $h$.
2. وضّح كيف يمكن إنشاء المنحنى $(C_h)$ الممثل للدالة $h$ انطلاقا من المنحنى $(C_f)$ .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## المسـألة رقم: 04

مشاهـــدة الحـــل

**I)** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x-7}{2-x}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ/ احسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.
   ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة $f$، ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين أن النقطة $A(2;-3)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.
3. بين أنه توجد نقطتان من $(C_f)$ يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y=-x-1$، يطلب تعيين معادلة كل منهما.
4. اوجد نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات.
5. مثل بيانيا $(C_f)$ ومماسيه $(T_1)$ و $(T_2)$

**II)** نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ كمايلي:

$$h(x)=-f(|x|)$$

و $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق

1. بيّن أنّ الدالة $h$ زوجية
2. إشرح كيف يمكن إنشاء المنحنى $(C_h)$
3. أنشئ $(C_h)$.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

## المسـألة رقم: 05

مشاهـــدة الحـــل

**I)** لتكن الدالة $f$ المعرفة بـ:

$$f(x)=\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$.
2. احسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر النتائج هندسيا.
3. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$، ثم شكل جدول تغيراتها.
4. أوجد نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات.
5. 
   أ/ بين أنه إذا كان $x\in D_f$ فإن $(4-x)\in D_f$.
   ب/ بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ $(C_f)$.
6. مثل بيانيا المنحنى $(C_f)$.
7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة:
   $f(x)=|m|$

**II)** نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-3;-1;1;3\}$ بـ:

$$h(x)=\frac{3x^2-12|x|+10}{x^2-4|x|+3}$$

1. ادرس شفعية الدالة $h$.
2. وضح كيف يتم رسم $(C_h)$ منحنى الدالة $h$ انطلاقا من $(C_f)$ ، ثم ارسمه.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## المسـألة رقم: 06

مشاهـــدة الحـــل

**I)** $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x+1}{x-1}$$

حيث $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقين، و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$

◆ عيّن $\alpha$ و $\beta$ حيث يقبل $(C_f)$ قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة 0 و $(C_f)$ يمر من النقطة ذات الاحداثيات $(2;3)$

**II)** نضع فيما يلي: $\alpha=1$ و $\beta=-1$:

1. احسب: $\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا.
2. احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .
3. 
   أ/ بيّن أنّ:
   $$f(x)=x+\frac{1}{x-1}$$
   ب/ استنتج أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.
   ج/ ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.
4. 
   أ/ بيّن أنّه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:
   $$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$
   ب/ ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.
5. بيّن أن النقطة $\omega$ (نقطة تقاطع $(\Delta)$ مع المستقيم المقارب العمودي) هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ .
6. ارسم كل من $(\Delta)$ و $(C_f)$ .
7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $(E)$ حيث:
   $$f(x)=m\ldots(E)$$

**III)** لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $h(x)=f(|x|)$

1. ادرس شفعية الدالة $h$.
2. وضّح كيف يمكن إنشاء المنحنى $(C_h)$ الممثل للدالة $h$ انطلاقا من المنحنى $(C_f)$ .

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## 07 المسـألة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}$$

نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوِ المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. أوجد ثلاثة أعداد حقيقية: $a, b, c$ بحيث كل $x$ من $D_f$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

2.
   أ/ استنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ عند $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.
   ب/ حدد وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.
3. أدرس تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.
4. جد إحداثي النقطة $\omega$ تقاطع المستقيمين المقاربين، وأثبت أنها مركز تناظر للمنحني $(C_f)$.
5. أنشئ المنحني $(C_f)$.
6. استنتج رسم المنحني $(C_h)$ الممثل للدالة $h$ المعرفة بـ:

$$h(x) = \frac{(x-4)^2}{|x-3|}$$

najah213.com · نجاح 213



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## 08 المسـألة رقم:
مشاهـــدة الحـــل

**I)** لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$

**1** ادرس تغيرات الدالة $g$.

**2**

أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $-0.4 < \alpha < -0.3$

ب/ حدد حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$.

**II)** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x - 1}$$

نسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

**1** بين من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 أن :

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x - 1}$$

**2**

أ/ احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

ب/ ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

**3** احسب: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

**4** ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_p)$ الممثل للدالة: $p(x) = x^2 - 2x - 1$. والمنحنى $(C_f)$ .

**5** بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{15}{2(1 - \alpha)} - 2$$

واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

**6** أنشئ بيانيا كل من $(C_p)$ و $(C_f)$.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## المسـألة رقم: 09

مشاهـــدة الحـــل

**I)** لتكن الدالة $f$ المعرفة بالعبارة:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 3x + 2}$$

❶ عين $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$، ثم بيّن أنه من أجل كل $x$ من $D_f$ فإن:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

حيث $c, b, a$ أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.

❷

أ/ ادرس تغيرات الدالة $f$.

ب/ أوجد المستقيمات المقاربة للمنحني $(C_f)$ الممثل للدالة $f$.

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ والمقارب الأفقي $(\Delta)$:

❸ عين تقريب تآلفي للدالة $f$ عند 0.

❹ أنشئ بيانيا المنحنى $(C_f)$.

**II)** نعرف الدالة $h$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$$

❶ عين مجموعة تعريف الدالة $h$.

❷ اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

❸ أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة $h$ عند 0 .

❹ ادرس شفعية الدالة $h$.

❺ استنتج التمثيل البياني $(C_h)$ للدالة $h$ انطلاقا من $(C_f)$.

❻ ناقشا بيانيا حسب الوسيط الحقيقي $m$ وجود وعدد حلول المعادلة:

$$(m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m - 1 = 0$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## المسـألة رقم: 10
مشاهـــدة الحـــل

لتكن $F$ دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، حيث: $F(0) = 0$، ومن أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

نقبل أن الدالة $F$ موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$.

**I)** $G$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$G(x) = F(x) + F(-x)$$

1. برر أن $G$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $G'(x)$ من أجل كل $x$ حقيقي.
2. احسب $G(0)$ واستنتج أن الدالة $F$ فردية.

**II)** $H$ الدالة المعرفة على المجال $I = ]0;+\infty[$ بـ:

$$H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. برر أنّ $H$ تقبل الاشتقاق على $I$ وأحسب $H'(x)$ من كل $x$ من $I$.
2. برهن أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$
3. استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x)] = 2F(1)$ ، ماذا ينتج عن المنحني $(C)$ ؟

**III)** $T$ الدالة المعرفة على $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ بِـ:

$$T(x) = F(\tan x) - x$$

1. أحسب $T'(x)$، ماذا ينتج عن الدالة $T$ ؟
2. أحسب $F(1)$.

**IV)**

1. انجز جدول تغيرات الدالة $F$ على $\mathbb{R}$.
2. أرسم المنحني $(C)$ ، ومستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل $-1$، $0$ و$1$.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## المسـألة رقم: 11

مشاهـــدة الحـــل

**I)** لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$ .

**1**

أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

**2**

أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]2;+\infty[$.

ب/ أعط حصرا سعته $0.1$ للعدد $\alpha$.

ج/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

**II)** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

و$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

**1** عيّن نهايات الدالة $f$ عند أطرف مجموعة تعريفها واعط تفسيرا هندسيا للنتائج.

**2** أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ ، مع تحديد الأعداد الحقيقية $c, b, a$.

**3**

أ/ بين أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا $(d)$ يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له.

ب/ ادرس الوضع النسبي للمستقيم $(d)$ والمنحني $(C_f)$.

**4**

أ/ شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

ب/ بين أنّ $(C_f)$ يقطع مرة وحيدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $\beta$ حيث $-1 < \beta < 0$.

ج/ بين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

**5** أحسب $f(0)$ ثم ارسم المستقيمين المقاربين و المنحني $(C_f)$.

**III)** نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

**1** بين أن $h$ زوجية .

**2** أشرح كيف تنشئ $(C_h)$ ثم أنشئه.

**3** ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلتين:

$$f(x) = m \quad \text{و} \quad f(x) = x + m$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

## المسـألة رقم: 12

مشاهـــدة الحـــل

**I)** لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$$

1. ادرس تجاه تغير الدالة $g$ على مجال تعريفها.
2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ يطلب تعيينه.
3. استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$.

**II)** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$$

1. 
   أ/ احسب نهاية الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

   ب/ برهن أنه من أجل كل $x$ حقيقي:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

   ج/ شكل جدول تغيرات الدالة $f$.
2. احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+3x]$ وفسر النتيجة هندسيا.
3. 
   أ/ ليكن $(d')$ المستقيم ذو المعادلة $y = x$ ، بين أن $(d')$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ عند $+\infty$.

   ب/ ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيمين $(d)$ و $(d')$.
4. انشئ بيانيا كلا من المستقيمين $(d)$ و $(d')$ و المنحني $(C_f)$.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

## المسـألة رقم: 13

مشاهـــدة الحـــل

**I)** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ: $g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 7x + 1$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها.
2. احسب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0,2)$ و $g(-0,1)$ إلى $10^{-1}$.
3. استنتج أنه يوجد عدد وحيد $\alpha$ من المجال $]-0.2;-0.1[$ حيث: $g(\alpha) = 0$ .
4. استنتج إشارة الدالة $g$ على المجال $]-1,+\infty[$.

**II)** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ .

1.
   أ/ احسب $\lim\limits_{x \to -1^{>}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
   ب/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]$ .
2. عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث من أجل كل $x$ من المجال $]-1,+\infty[$ يكون:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{(x+1)^2}$$

3.
   أ/ بين أن المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$.
   ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني $(C_f)$ والمستقيم $(D)$ .
4.
   أ/ بين أنه من أجل كل $x$ من $]-1,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

   ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
5. اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ في النقطة $A$ ذات الفاصلة 2 .
6. بيّن أن النقطة $A$ نقطة انعطاف للمنحني $(C_f)$.
7. عين نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.

**III)** نعتبر $h$ الدالة المعرفة على $]-1,+\infty[ \cup ]-\infty,-1[$ كما يلي:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x > -1 \\ f(-x-2) & ; \quad x < -1 \end{cases}$$

ونسمي $(C_h)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ .

1. بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر للمنحني $(C_h)$ .
2. (نقبل أن $f(\alpha) \approx -0,1$)، مثّل بيانيا $(C_f)$ ، ثم استنتج التمثيل البياني لـ $(C_h)$ .

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# المسـألة رقم: 14

مشاهـــدة الحـــل

**I)** $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{2x-2}$$

حيث $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقين، و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

◆ عيّن $\alpha$ و $\beta$ حيث يقبل $(C_f)$ قيمة حدية عند النقطة ذات الاحداثيات $(0;-1)$.

**II)** نضع فيما يلي: $\alpha=-2$ و $\beta=2$:

❶ احسب: $\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

❷ احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❸

أ/ عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حيث:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-2}$$

ب/ استنتج أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

❹

أ/ بيّن أنّه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$$

ب/ ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

❺

أ/ عيّن إحداثيات النقطة $\omega$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=1$.

ب/ بيّن أن النقطة $\omega$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ .

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى $(C_f)$ يشمل النقطة $\omega$ .

❻ ارسم كل من $(\Delta)$ و $(C_f)$ .

❼ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $(E)$ حيث:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+m\ldots(E)$$

**III)** لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$h(x)=f(|x|)$$

❶ ادرس شفعية الدالة $h$.

❷ وضّح كيف يمكن المنحنى $(C_h)$ الممثل للدالة $h$ انطلاقا من المنحنى $(C_f)$ .

الخليل للرياضيات

الصفحة 16 ◄



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## المسـألة رقم: 15

مشاهـــدة الحـــل

**I)** لتكن الدالة $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

**1**

أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ .

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

**2**

أ/ بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $0.7 < \alpha < 0.8$ .

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$

**II)** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

**2**

أ/ بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب/ استنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و $(\Delta)$.

**3**

أ/ بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

ب/ استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$. (نأخذ $f(\alpha) \approx -0.1$)

**4** احسب $f(1)$، ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

**5** أنشئ المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$ .

**6** لتكن $h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ/ تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$.

ب/ استنتج أن $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ $(C_h)$ .

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213




**I)** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{2x}$$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. ادرس تغيرات الدالة $f$، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
3. 
   أ/ $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية، بيّن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$:
   $$f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{2x}$$
   ب/ استنتج أنّ $(C_f)$ يقبل منحنى $(C)$ مقارب بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلته.
4. 
   أ/ بيّن أن $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة $A$ ، يطلب تعيين إحداثييها.
   ب/ اكتب معادلة للمماس $(T)$ عند النقطة $A$.
   ج/ بيّن أنّ المماس $(T)$ يقطع المنحنى $(C_f)$ في نقطة أخرى $B$ يطلب تعيين إحداثييها.
5. مثل بيانيا $(T)$ ، $(C)$ و $(C_f)$
6. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وحلول المعادلة $f(x) = m$

**II)** نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{-x^2|x| - |x| - 2}{2x}$$

1. ادرس شفعية الدالة $h$.
2. أنشئ مع الشرح كيفية إنشاء $(C_h)$ المنحنى الممثل للدالة $h$ انطلاقا من $(C_f)$ في معلم آخر.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

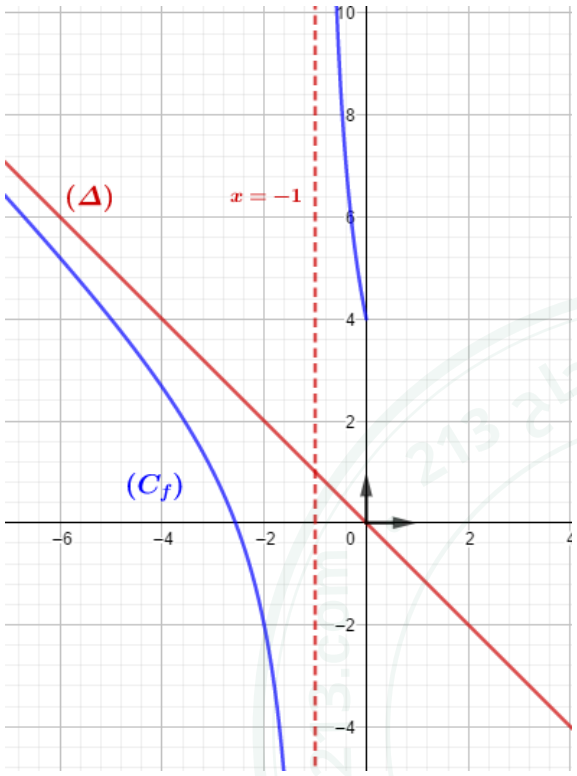
## المسألة رقم: 17

مشاهدة الحل

**I)** $f$ دالة معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ: $I=$

$$f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس كما هو مبين في الشكل.




❶

أ/ احسب نهايات $f$ عند الحدود المفتوحة لـ $I$.

ب/ بقراءة بيانية ودون دراسة تغيرات الدالة $f$ شكل جدول تغيراتها.

❷ $g$ دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x+\frac{4}{x+1}$$

و $(C_g)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم السابق.

أ/ احسب نهاية $g$ عند $+\infty$.

ب/ تحقق من أنّ $(C_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ عند $+\infty$ يطلب تعيين معادله له.

ج/ ادرس تغيرات الدالة $g$.

**II)** $k$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$$

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right)$ و $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}}\left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right)$ ، ماذا تستنتج؟

ب/ اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

❷ اكتب معادلتي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند الناقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

❸ ارسم $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ و $(C_k)$ .

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

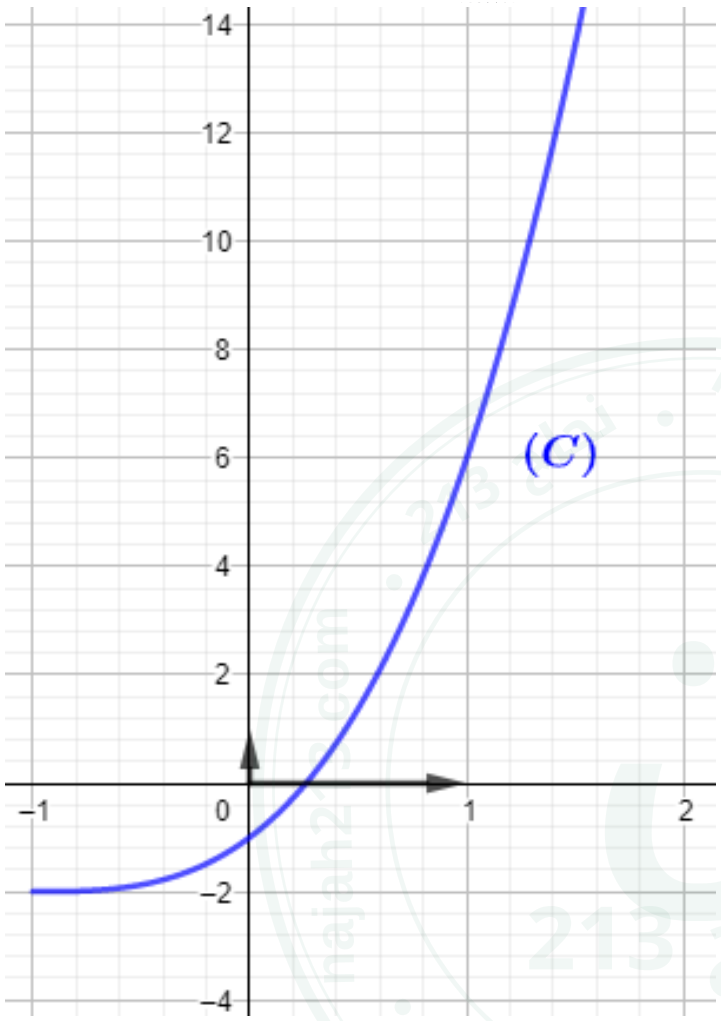
najah213.com · نجاح 213

## المسـألة رقم: 18

مشاهـــدة الحـــل

المنحنى $(C)$ هو التمثيل البياني للدالة $g$ المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$




❶

أ/ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة $g$ وحدد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب/ علل وجود عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق:

$$g(\alpha) = 0$$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

❷ $f$ هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

وليكن $(\Gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

حيث $f'$ هي مشتقة الدالة $f$

ب/ عين دون حساب

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$$

وفسر النتيجة هندسيا.

ج/ احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ ، ثم فسر النتيجتين هندسيا.

د/ شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

❸ نأخذ $\alpha \approx 0.26$

أ/ عين مدور $f(\alpha)$ إلى $10^{-2}$.

ب/ ارسم المنحنى $(\Gamma)$.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# المسـألة رقم: 19

مشاهـــدة الحـــل

**I)** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$ .
2. احسب $g(-2)$ ، ثم حل المعادلة $g(x) = 0$
3. استنتج إشارة $g(x)$.

**II)** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}$$

1. بيّن أنّ:

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

2. ادرس تغيرات الدالة $f$، ثم شكل جدول تغيراتها.
3. $a$، $b$، $c$ ثلاث أعداد حقيقية، بين أنّ:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$$

4. 
   أ/ بين أنّ المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل وليكن $(\Delta)$، يطلب تعيين معادلتيهما.
   ب/ ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.
5. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ حيث: $\alpha \in ]-0.35; -0.34[$
6. ارسم المنحنى $(C_f)$
7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $(E)$ حيث: $f(x) = 2x + m$

**III)** $h$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

1. بين أنّ الدالة $h$ زوجية.
2. وضح كيف يتم إنشاء المنحنى $(C_h)$ الممثل للدالة $h$ انطلاقا من $(C_f)$ . ثم أنشئه.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## المسـألة رقم: 20

مشاهـــدة الحـــل

**I)** لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 3x + 16$$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$ على $\mathbb{R}$، ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $-2.5 < \alpha < -2$.
3. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$.

**II)** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1}$$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

2. ادرس تغيرات الدالة $f$، ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$، ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$
4. 
   أ/ بين أن $(\Delta)$ المستقيم المنصف الأول مقارب مائل لـ $(C_f)$ .
   ب/ ادرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$ .
5. 
   أ/ أوجد فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.
   ب/ مثل بيانيا $(\Delta)$ و $(C_f)$ .
   ج/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة

$$x^3 - mx^2 - 8 - m = 0$$

**III)** نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1}$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

## المسـألة رقم: 21

مشاهـــدة الحـــل

**I)** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$، ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $\alpha \in ]2;3[$
3. عين قيمة العدد الطبيعي $n$ بحيث: $\frac{n}{10} < \alpha < \frac{n+1}{10}$
4. استنتج إشارة $g(x)$.

**II)** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

3. ادرس تغيرات الدالة $f$، ثم شكل جدول تغيراتها.
4. بين أنّ $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$، ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$
5. 
   أ/ عين الأعداد الحقيقية $a$، $b$، $c$ بحيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$

   ب/ بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل نسميه $(\Delta)$

   ج/ ادرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$.
6. عين معادلة المماس $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0
7. مثل بيانيا كل من $(\Delta)$، $(T)$ و $(C_f)$ .
8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$x^3 - (3+m)x^2 + (3+2m)x + 1 - m = 0$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## المسـألة رقم: 22

مشاهـــدة الحـــل

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:

$$f(x)=|x+2|+\frac{1}{x+1}$$

وليكن $(C_f)$ المنحنى الممثل لها في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. اكتب عبارة الدالة $f$ دون كتابة رمز القيمة المطلقة.
2. ادرس قابلية الاشتقاق للدالة $f$ عند 2، ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.
3. 
   أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
   ب/ احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
4. ادرس تغيرات الدالة $f$، ثم شكل جدول تغيراتها.
5. 
   أ/ برهن أن $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$، يطلب تعيين معادلتيهما.
   ب/ ادرس الوضعية بين $(C_f)$ و كلا من $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$
6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-\infty;-2[$ حيث: $-2.7<\alpha<-2.6$
7. مثل بيانيا كل من $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ و $(C_f)$ .

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

# الحلول (مقترحة) :

## فهرس المحتويات:


| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| المسألة رقم 01 | : | المسألة الحل | المسألة رقم 02 | : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 03 | : | المسألة الحل | المسألة رقم 04 | : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 05 | : | المسألة الحل | المسألة رقم 06 | : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 07 | : | المسألة الحل | المسألة رقم 08 | : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 09 | : | المسألة الحل | المسألة رقم 10 | : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 11 | : | المسألة الحل | المسألة رقم 12 | : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 13 | : | المسألة الحل | المسألة رقم 14 | : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 15 | : | المسألة الحل | المسألة رقم 16 | : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 17 | : | المسألة الحل | المسألة رقم 18 | : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 19 | : | المسألة الحل | المسألة رقم 20 | : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 21 | : | المسألة الحل | المسألة رقم 22 | : | المسألة الحل |


♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥

najah213.com · نجاح 213

## 01 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

❶

أ/ حساب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ معناه الدالة $f$ معرفة على المجال: $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

- حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}[x]=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}[x]=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to1}[f(x)]=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

- تفسير النتائج هندسيا:

$x=1$ معادلة مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ موازٍ لحامل محور التراتيب بجوار $+\infty$

ب/ دراسة إتجاه تغير الدالة $f$:

لدينا الدالة $f$ معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال تعريفها

أولا نحسب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^4}$$
$$=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)-2(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

ثانيا: جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $+$ | | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | $-$ | | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x-1)^3$ | $-$ | | | $-$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | $+$ | | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(0)$ | $+\infty$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(3)$ | ↗ | $+\infty$ |

❷

أ/ تعيين الأعداد $c,b,a$: من أجل كل $x\neq0$ لدينا:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+b}{(x-1)^2}$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + cx + b}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + cx + b}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a-2b)x + 2b}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -4 \\ a - 2b + c = 8 \\ 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

ب/ استنتاج المستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - [x-2]) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x - 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} - [x-2]\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$.

ج/ وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(d)$:

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$ :

$$f(x) - y = x - 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} - x + 2$$
$$= \frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

لدينا: $(x-1)^2 > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |

- الوضعية:
  - $(C_f)$ تحت $(d)$ لما $x \in ]-\infty; 3[$
  - $(C_f)$ يقطع $(d)$ لما $x = \frac{2}{3}$
  - $(C_f)$ فوق $(d)$ لما $x \in ]\frac{2}{3}; 1[ \cup ]1; +\infty[$

حيث $A\left(\frac{2}{3}; \frac{-4}{3}\right)$

❸ إيجاد معادلة المماس $(T)$:

المماس $(T)$ يوازي المستقيم $(d)$ معناه: يوجد $a$ حيث: $f'(a) = 1$

$$f'(a) = 1 \Rightarrow \frac{a^2(a-3)}{(a-1)^3} = 1$$
$$\Rightarrow a^2(a-3) = (a-1)^3$$
$$\Rightarrow 3a - 1 = 0$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

ومنه معادلة المماس $(T)$ هي: $(T): f'(a)(x-a)+f(a)$

$$\boxed{(T): y = x - \frac{1}{3} - \frac{47}{12}}$$

❹ تبيين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-\infty;1[$:

لدينا الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty;1[$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

ولدينا: $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)\times\left(\lim\limits_{x\to 1} f(x)\right) < 0$

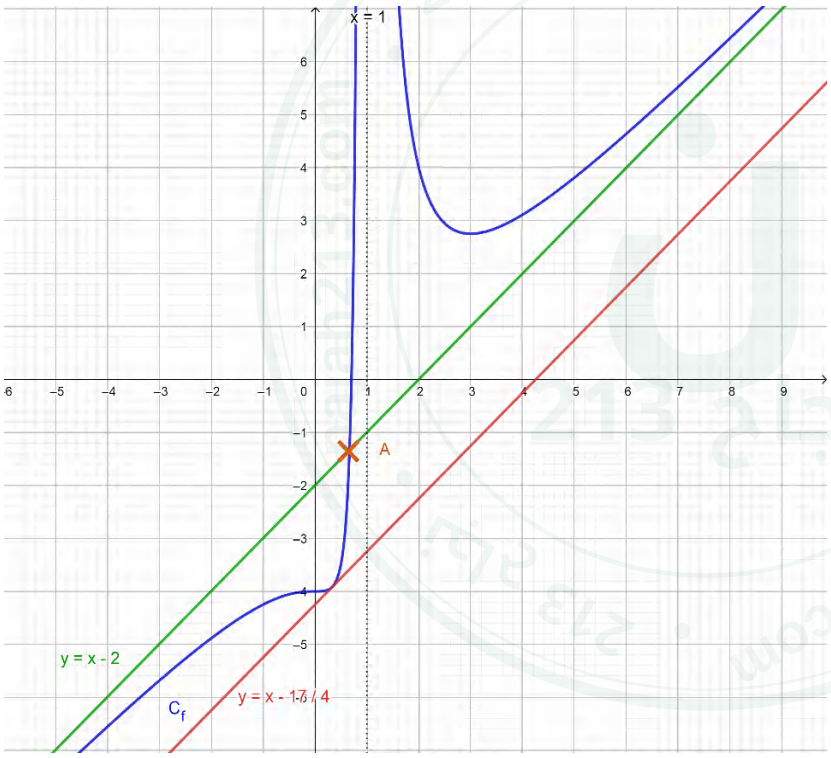
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-\infty;1[$:

- استنتج قيمة مقربة إلى $10^{-2}$ للعدد $\alpha$:

| $\alpha$ | $-\infty$ | ... | 0.68 | 0.69 | 0.70 | 0.71 | 0.72 | ... | 0.98 | 0.99 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(\alpha)$ | $+\infty$ | ... | $-0.92$ | $-0.58$ | $-0.18$ | 0.25 | 0.76 | ... | 2348.97 | 9698.98 | $+\infty$ |

من الجدول نلاحظ أن: $0.70 < \alpha < 0.71$

❺ التمثيل البياني للمستقيم $(d)$ والمماس $(T)$ والمنحنى $(C_f)$:




خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(d)$ ذو المعادلة $y = x-2$
- نرسم معادلة المماس $(T)$ ذو المعادلة $y = x - \frac{17}{4}$
- نعين $A$ نقطة تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع $(d)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$

❻ استنتاج بيانيا حلول المعادلة $f(x) = x + m$:

لما $m < \frac{-17}{4}$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m = \frac{-17}{4}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا

لما $\frac{-17}{4} < m < -2$ المعادلة تقبل حلان

لما $m = -2$ المعادلة تقبل حل وحيد $x = \frac{2}{3}$

لما $m > -2$ المعادلة تقبل حلان

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## 02 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**(I**

❶ دراسة اتجاه تغير الدالة $g$:

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه: $g'(x) = 3x^2 + 6$

ولدينا $3x^2 + 6 > 0$، إذن: الدالة $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$ :

بما أن الدالة $g$ مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g(-1.48) = -0.12$ و $g(-1.47) = 0.0035$

ولدينا $g(-1.48) \times g(-1.47) < 0$

فإنه حسب مبرهة القيم المتوسطة، $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيد $\alpha$.

- استنتاج إشارة $g(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**(II**

❶

أ/ حساب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3-6}{x^2+2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3-6}{x^2+2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x] = +\infty$

ب/ حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2) - (2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $+\infty$ |

❷

أ/ تبيين أن المستقيم $(\Delta)$ مقارب مائل:

لدينا:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-6}{x^2+2}-x\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-6-2x}{x^2+2}\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-2x}{x^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-2}{x}\right]=0$$

ومنه $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$ .

ب/ دراسة وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$:

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x)-y=\frac{-2x-6}{x^2+2}$$

لدينا: $(x^2+2)>0$ ومنه الإشارة من $(-2x-6)$:

$$-2x-6=0\Rightarrow -2x=6$$
$$\Rightarrow x=-3$$

ومنه إشارة $f(x)-y$:

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $+$ | $0$ | $-$ |

- الوضعية:
  - $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ على المجال: $]-\infty;-3[$
  - $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(-3;-3)$
  - $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ على المجال: $]-3;+\infty[$

❸ تبين أن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$:

يكفي أن نبرهن أن $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha$$
$$=\frac{2\alpha^3-12-3\alpha^3-6\alpha}{\alpha^2+2}$$
$$=\frac{-(\alpha^3+6\alpha+12)}{\alpha^2+2}$$
$$=-\frac{g(\alpha)}{\alpha^2+2}$$

ولدينا من السؤال السابق: $g(\alpha)=0$ ومنه:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=-\frac{0}{\alpha^2+2}=0$$

إذن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $-1.48<\alpha<-1.47$ ولدينا: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

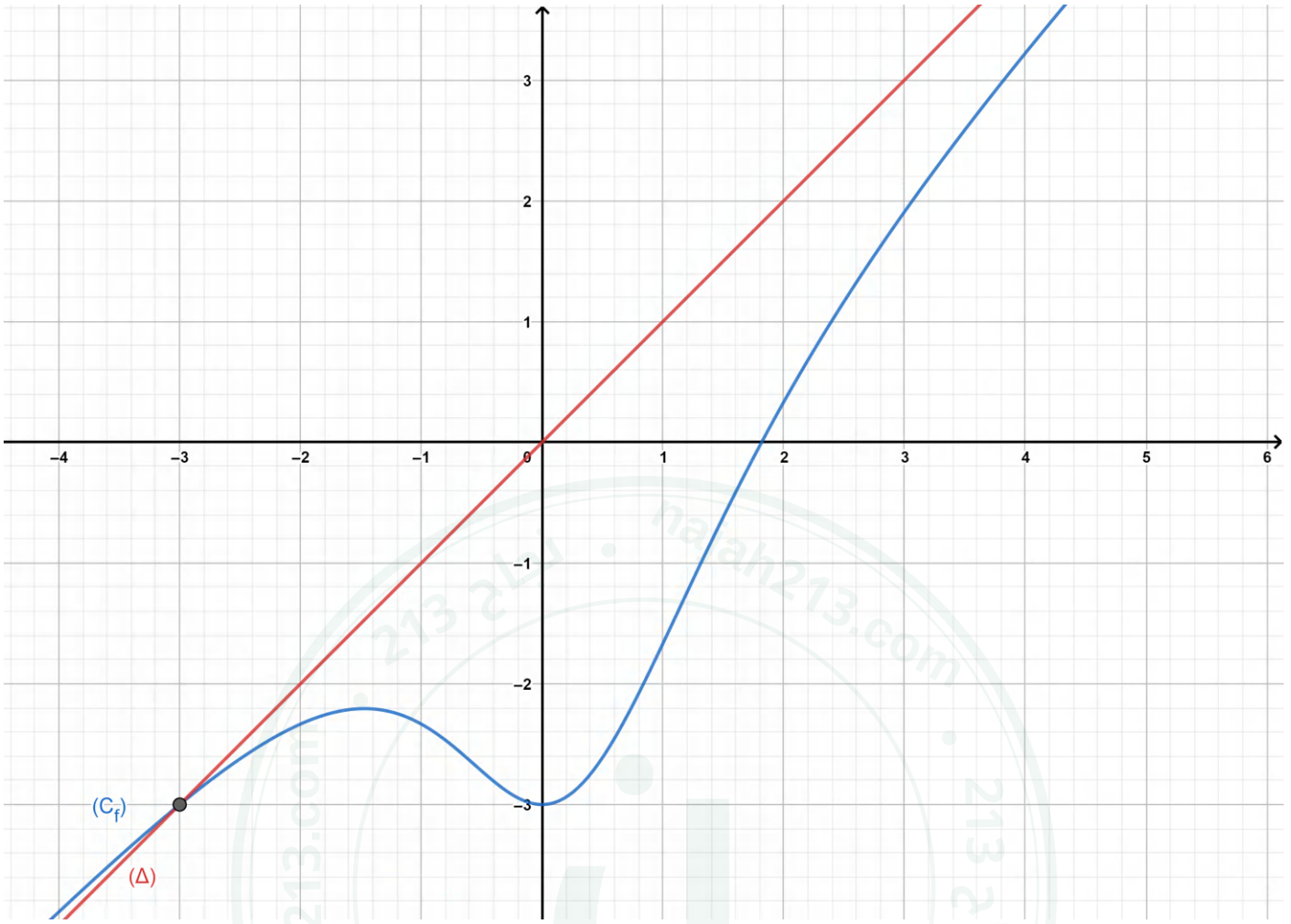
$$\frac{3}{2}(-1.48)<\frac{3}{2}\alpha<\frac{3}{2}(-1.47)$$
$$-2.22<f(\alpha)<-2.21$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

4 إنشاء المستقيم $(\Delta)$ والمنحني $(C_f)$:






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

## 03 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)**

❶ تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حيث: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}$

لدينا من جدول التغيرات: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=0 \\ f(-2)=5 \end{cases}$ ومنه:

$$f(0)=1 \Rightarrow \frac{c}{1}=1$$
$$\Rightarrow \boxed{c=1}$$

ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x+1)-(ax^2+bx+c)}{(x+1)^2}$$

وبما أنّ $f'(0)=0$ فإنّ:

$$f'(0)=0 \Rightarrow \frac{b-c}{1}=0$$
$$\Rightarrow c=\boxed{b=1}$$

ولدينا:

$$f(-2)=5 \Rightarrow \frac{4a-2b+c}{-1}=5$$
$$\Rightarrow 4a=2b-c-5$$
$$\Rightarrow a=\frac{2b-c-5}{4}$$
$$\Rightarrow a=\frac{-4}{4}$$
$$\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

❷ تعيين $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x)$:

من جدول التغيرات نجد: $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x)=+\infty$

- التفسير الهندسي:

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x=-1$

❸ تعيين معادلة المماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $(-2)$:

لما $x=-2$ الدالة $f$ تقبل قيمة حدية محلية، أي أن المماس يكون موازي لمحور الفواصل، ومنه معادلة المماس هي:

$y=f(-2)$ أي $y=5$

❹ الاجابة بصحيح أم خطأ مع التبرير:

أ/ $f(2)>f(1)$

خطأ، لأن: الدالة متناقصة على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا: $\{1;2\}\in ]0;+\infty[$ ومنه $f(2)<f(1)$

(تنعكس صور التراتيب لأن الدالة متناقصة).

ب/ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}-\{-1\}$:

خطأ، لأنّ: لدينا من جدول التغيرات $f(x)$ تنعدم من أجل قيمتين هما $\alpha$ و $\beta$.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

ج/ $f'(1) > 0$:

خطأ، لأنّ: الدالة متناقصة على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا: $1 \in ]0;+\infty[$ ومنه $f'(1) > 0$

(لما الدالة $f$ متناقصة تكون $f'(x) < 0$)

❺ تعيين إشارة الدالة $f$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | | |

II) لدينا: $f(x) = \frac{-x^2+x+1}{x-1}$

❶

أ/ تبيين أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$:

$$f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$$
$$= \frac{(-x+2)(x+1) - 1}{x+1}$$
$$= \frac{-x^2 - x + 2x + 2 - 1}{x+1}$$
$$= \frac{-x^2 + x + 1}{x+1}$$

ب/ استنتاج أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $\pm\infty$ :

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (-x+2)] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[= -x + 2 - \frac{1}{x+1} + x - 2\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[-\frac{1}{x+1}\right]$$
$$= 0$$

إذن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y = -x + 2$

ج/ دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$:

$$f(x) - (-x+2) = -\frac{1}{x+1} = \frac{1}{-x-1}$$

لدينا:

$$-x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) - y_{(\Delta)}$ | $+$ | | $-$ | |
| الوضعية | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | |

❷

أ/ تعيين إحداثيات النقطة $\omega$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$:

لدينا $\begin{cases} y = -x + 2 \\ x = -1 \end{cases}$ بتعويض القيمة $(x = -1)$ في معادلة $(\Delta)$ نجد $(y = 3)$ ، إذن: $\omega(-1;3)$

ب/ تبيين أن النقطة $\omega$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ :

• نبين أولا أنّ $(-2-x) \in D_f$:

لدينا: $x \in D_f$ معناه: $x \in ]-\infty;-1[ \cup ]-1;+\infty[$ معناه: $x < -1$ أو $x > -1$

معناه: $(-x) < 1$ أو $(-x) > 1$ معناه: $(-2-x) < -1$ أو $(-2-x) > -1$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

معناه: $(-2-x) \in ]-\infty;-1[ \cup ]-1;+\infty[$ معناه: $(-2-x) \in D_f$

• نبيّن ثانيا أنّ $f(-2-x)+f(x)=6$:

$$f(-2-x)+f(x) = -(-x-2)+2-\frac{1}{-x-2+1}-x+2-\frac{1}{x+1}$$
$$= 6-\frac{1}{-x-1}-\frac{1}{x+1}$$
$$= 6+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1}$$
$$= 6$$

إذن النقطة $\omega$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$

**مركز التناظر:**

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر $(C_f)$ إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha+x) \in D_f \\ (\alpha-x) \in D_f \\ f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta \end{cases}$$

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى $(C_f)$ يشمل النقطة $\omega$ :

يوجد مماس يشمل النقطة $\omega$ معناه يوجد $a$ حقيقي، يحقق:

$$y_\omega = f'(a)(x_\omega - a)+f(a) \dots (*)$$

نفرض أنّ $(*)$ ونصل إلى تناقض:

قبل ذلك لدينا: $f'(x) = -1+\frac{1}{(x+1)^2}$

ومنه:

$$y_\omega = f'(a)(x_\omega-a)+f(a) \Rightarrow -1 = f'(a)(3-a)+f(a)$$
$$\Rightarrow -1 = \left(-1+\frac{1}{(a+1)^2}\right)(3-a)+\frac{-a^2+a+1}{a+1}$$
$$\Rightarrow -1 = \left(\frac{-(a+1)^2+1}{(a+1)^2}\right)(3-a)+\frac{-a^2+a+1}{a+1}$$
$$\Rightarrow -1 = \frac{(-(a^2+2a+1)+1)(3-a)}{(a+1)^2}+\frac{(-a^2+a+1)(a+1)}{(a+1)^2}$$
$$\Rightarrow -1 = \frac{(-a^2-2a-1+1)(3-a)+(-a^2+a+1)(a+1)}{(a+1)^2}$$
$$\Rightarrow -(a+1)^2 = -3a^2-6a+a^3+2a^2-a^3+a^2+a-a^2+a+1$$
$$\Rightarrow -a^2-2a-1 = -a^2-4a+1$$
$$\Rightarrow 2a = 2$$
$$\Rightarrow a = 1$$

وهذا تناقض لأنّ $a \notin D_f$ ومنه لا يوجد أي مماس يشمل النقطة $\omega$.

❸ رسم كل من $(\Delta)$ و $(C_f)$ :

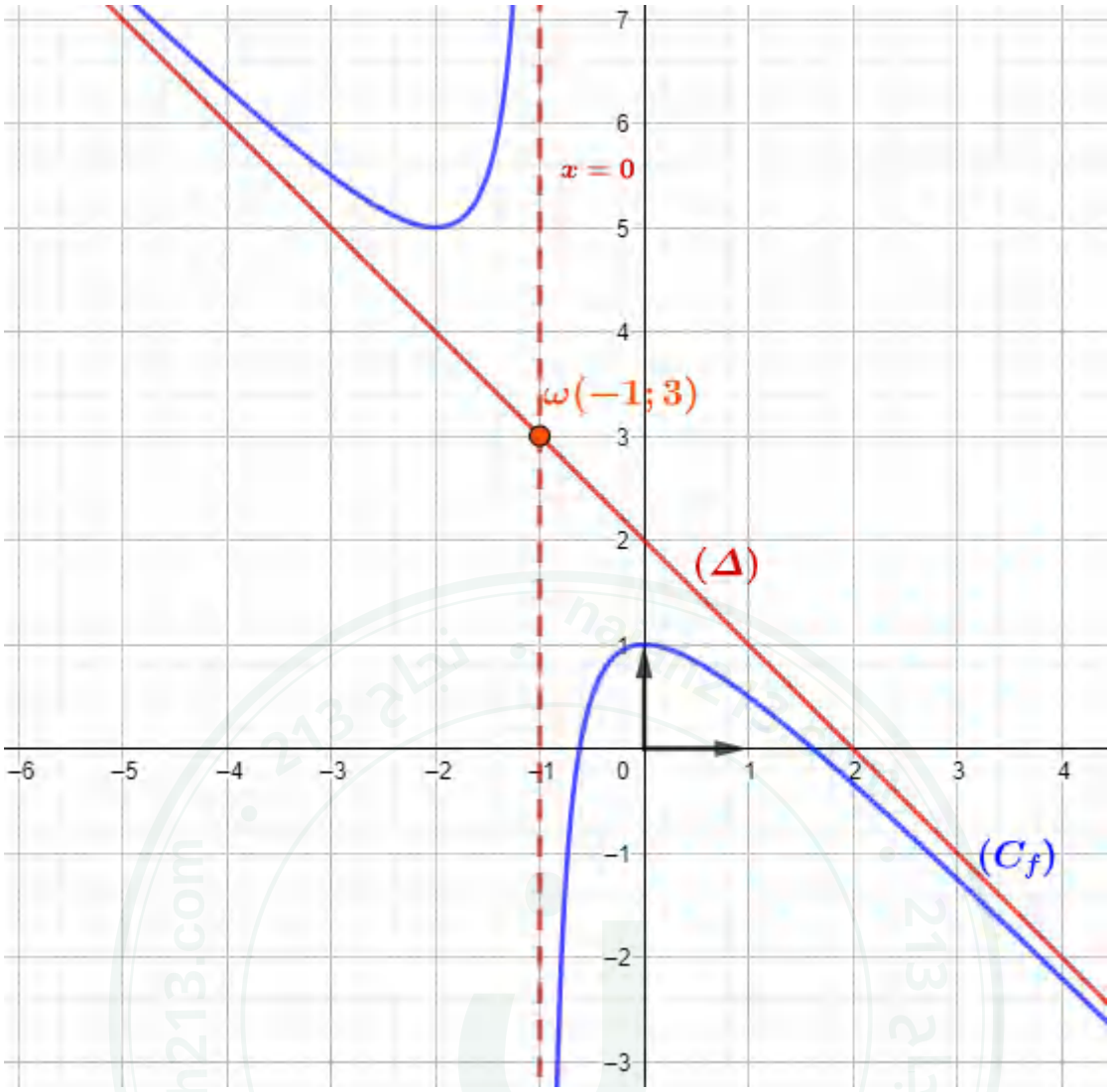
خطوات الرسم:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=-1$
- نعين $\omega(-1;3)$ مركز تناظر $(C_f)$
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$
- باستعمال جدول تغيرات الدالة $f$ نرسم $(C_f)$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com




❹ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = -x + m$:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -x + m$، وهي:

| | | |
|---|---|---|
| لما | $m \in ]-\infty;1[$ | للمعادلة حل وحيد سالب |
| لما | $m = 1$ | للمعادلة حل مضاعف معدوم |
| لما | $m \in ]1;2[$ | للمعادلة حل وحيد موجب |
| لما | $m = 2$ | المعادلة لا تقبل حلول |
| لما | $m \in ]2;3[$ | للمعادلة حل وحيد سالب |
| لما | $m = 3$ | للمعادلة حل مضاعف موجب |
| لما | $m \in ]3;+\infty[$ | للمعادلة حل وحيد سالب |

**III)** لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ $g(x) = [f(x)]^2$.

❶ تعيين نهايات الدالة $g$ عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا: الدالة $g = u \circ f$ حيث: $u(x) = x^2$ ومنه:

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

**نهاية مركب دالتين:**

نعتبر $u$، $v$ و $f$ ثلاث دوال حيث:

$f = v \circ u$

ولتكن $a$، $b$ و $c$ أعداد حقيقية أو منتهية $\pm\infty$

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$

وَ: $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$

فإنَ: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

- $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{<\\ x\to -1}} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{<\\ x\to -1}} g(x) = +\infty$
- $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{>\\ x\to -1}} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{>\\ x\to -1}} g(x) = +\infty$

❷ حساب: $g(\alpha)$ ، $g(\beta)$، $g(0)$ و $g(-2)$:

لدينا من جدول التغيرات $f(\alpha) = 0$ و $f(\beta) = 0$ ومنه:

$$g(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = 0 \quad ; \quad g(\beta) = [f(\beta)]^2 = 0$$

ولدينا:

$$g(0) = [f(0)]^2 = 1^2 = 1 \quad ; \quad g(-2) = [f(-2)]^2 = 5^2 = 25$$

❸ باستعمال مشتق مركب دالتين، حساب $g'(x)$:

لدينا: $g(x) = (u \circ f)(x) = u\big(f(x)\big)$

ومنه: $g'(x) = f'(x) \times u'\big(f(x)\big)$

إذن: $g'(x) = f'(x) \times 2f(x)$

❹ استنتاج تغيرات الدالة $g$ دون دراسة تغيراتها:

إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$ في إشارة $f(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | |
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $25$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(IV

❶ دراسة شفعية الدالة $h$:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

إذن الدالة $h$ زوجية:

❷ توضيح كيف يمكن إنشاء المنحنى $(C_h)$ الممثل للدالة $h$ انطلاقا من المنحنى $(C_f)$ :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه $(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة $h$ زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## 04 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)**

**❶**

أ/ حساب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{3x}{-x}\right] = -3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x}{-x}\right] = -3$
  - $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right] = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$
  - $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right] = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

- تفسير النتائج هندسيا:

$y = -3$ معادلة مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ موازٍ لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$

$x = 2$ معادلة مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ موازٍ لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة إتجاه تغير الدالة $f$:

لدينا الدالة $f$ معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال تعريفها

أولا نحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{3(2-x)-(3x-7)}{(2-x)^2}$$
$$= \frac{-1}{(2-x)^2} < 0$$

لدينا $f'(x) < 0$ ومنه الدالة $f$ متناقصة تماما:

- جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f'(x)$ | $-3$ | ↘ | ‖ | ↘ | $-3$ |
| | | | $-\infty$ | | $+\infty$ |

**❷** تبيين أن النقطة $A$ هي مركز تناظر لـ $(C_f)$:

أولا نثبت أنّ $(2(2)-x) \in D_f$

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in ]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

معناه: $x \in ]-\infty;2[$ أو $x \in ]2;+\infty[$ معناه: $x < 2$ أو $x > 2$ معناه: $-x > -2$ أو $-x < -2$

معناه: $(4-x) > 2$ أو $(4-x) < 2$ معناه: $(4-x) \in ]-\infty;2[$ أو $(4-x) \in ]2;+\infty[$

إذن: $(4-x) \in ]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

ثانيا نثبت أنّ $f(2(4)-x)+f(x) = 2(-3)$:

لدينا:

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$f(4-x)+f(x)=\frac{3(4-x)-7}{2-(4-x)}+\frac{3x-7}{2-x}$$
$$=\frac{5-3x}{-2+x}+\frac{7-3x}{x-2}$$
$$=\frac{12-6x}{-2+x}$$
$$=\frac{-6(-2+x)}{-2+x}=-6$$

إذن النقطة $A(2;-3)$ هي مركز تناظر لـ $(C_f)$.

❸ إيجاد نقطتان من $(C_f)$ يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y=-x-1$:

◄ المماس لـ $(C_f)$ عن النقطة ذات الفاصلة $a$ يعطى بالمعادلة التالية: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ ►

لدينا المماس موز للمستقيم ذو المعادلة $y=-x-1$ معناه $f'(a)=-1$

ومنه $-\frac{1}{(2-a)^2}=-1$ ومنه $a^2-4a+3=0$

لدينا: $\Delta=(-4)^2-4(1)(3)=4>0$

إذن:

$$\begin{cases}a_1=\dfrac{4-2}{2}=1\\ a_2=\dfrac{4+2}{2}=3\end{cases}$$

إذن يوجد مماسان لـ $(C_f)$ موازيان للمستقيم ذو المعادلة: $y=-x+4$، معادلتيهما:

$$(T_1):y=f'(-1)(x-a_1)+f(a_1)$$
$$=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=-1(x-1)+(-4)$$
$$=-x-3$$
$$(T_2):y=f'(a_2)(x-a_2)+f(a_2)$$
$$=f'(3)(x-3)+f(3)$$
$$=-1(x-3)+(-2)$$
$$=-x+1$$

إذن:

$$\begin{cases}(T_1):y=-x-3\\ (T_2):y=-x+1\end{cases}$$

❹ إيجاد نقطة تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات:

مع محور التراتيب:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ ►

$$f(0)=\frac{3(0)-7}{2-(0)}=-\frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(yy')=\left\{\left(0;-\frac{7}{2}\right)\right\}$$

مع محور الفواصل:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$ ►

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{3x-7}{2-x}\Rightarrow 3x-7=0\Rightarrow x=\frac{7}{3}$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

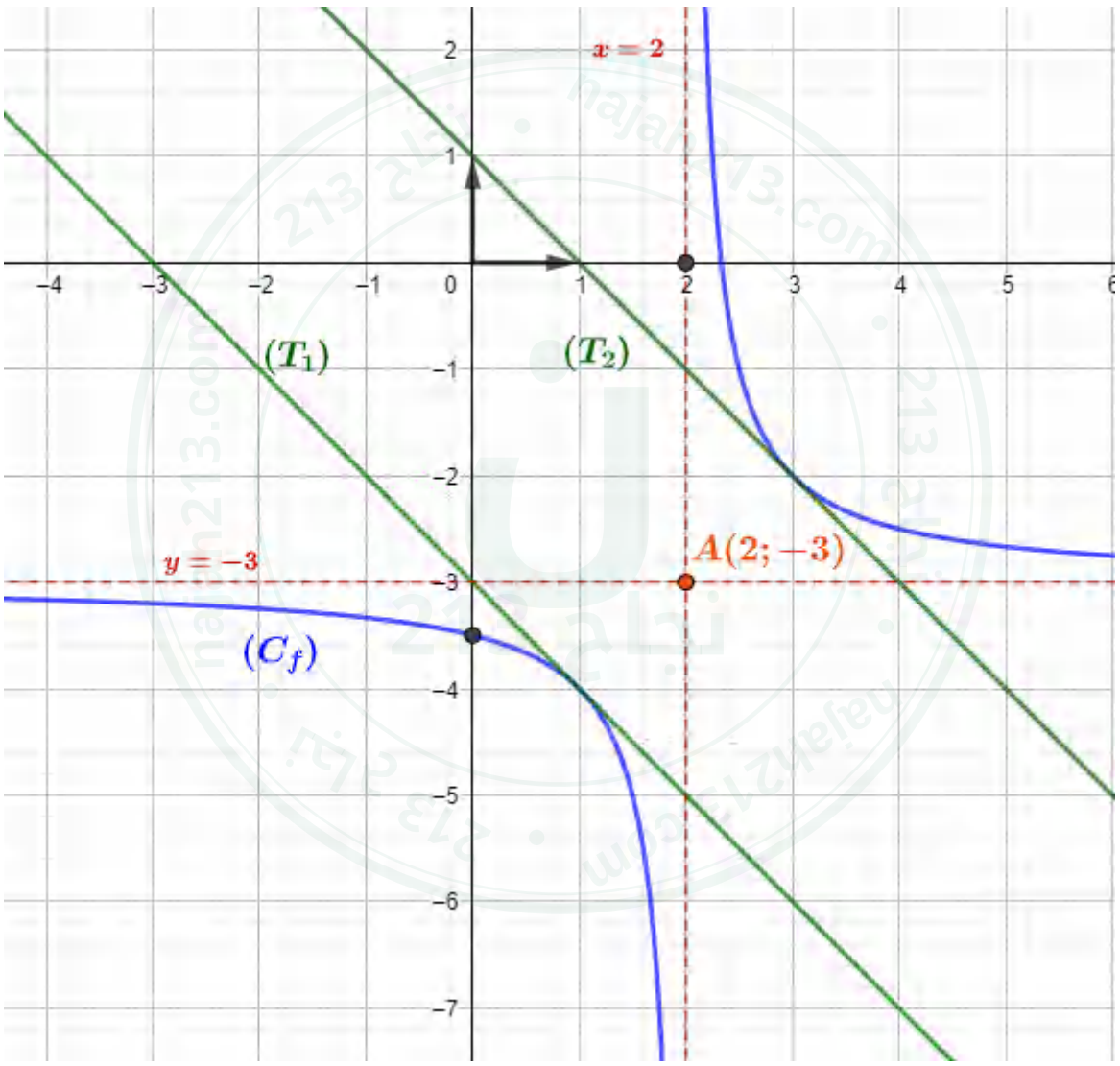
ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{\left(\frac{7}{3}; 0\right)\right\}$$

❺ التمثيل البياني :

خطوات إنشاء المنحنى $(C_f)$ على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = -3$ و $x = 2$
- نرسم المماسين $(T_1)$ و $(T_2)$ حيث: $\begin{cases} y_1 = -x - 3 \\ y_2 = -x + 1 \end{cases}$
- نعين النقطة $A(2; -3)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$.
- نعين نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات $(x'x)$ و $(y'y)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$




II)

❶ تبيين أنّ الدالة $h$ زوجية:

لدينا:

$$\begin{aligned} h(-x) &= -f(|-x|) \\ &= -f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة $h$ زوجية



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

❷ شرح كيف يمكن إنشاء المنحنى $(C_h)$ :

لدينا:

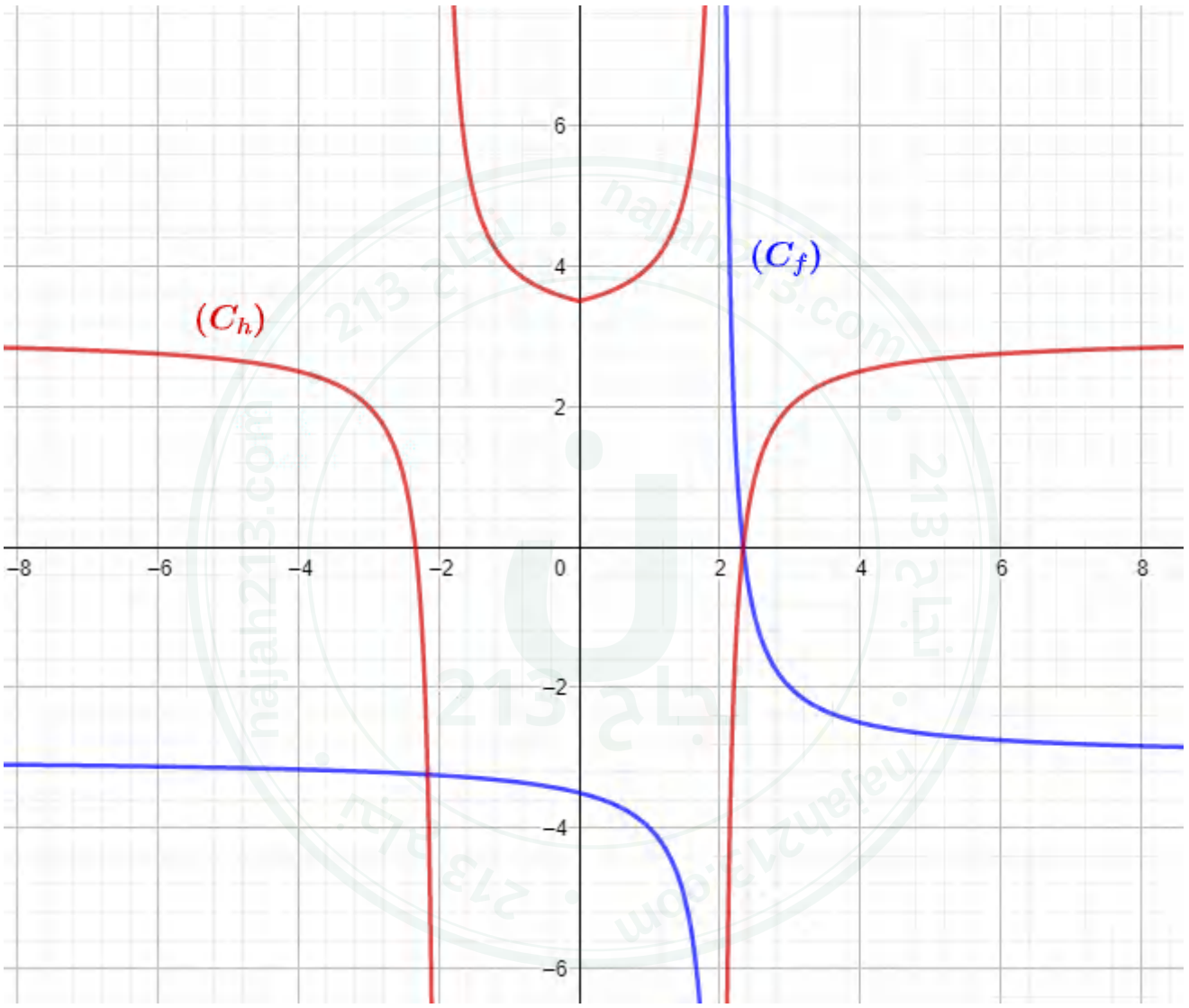
$$h(x) = -f(|x|) = \begin{cases} -f(x) & ;x \geq 0 \\ -f(-x) & ;x < 0 \end{cases}$$

كيفية الرسم:

لما $x \in [0;+\infty[$ يكون $(C_h)$ متناظر مع $(C_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل

وبما أنّ الدالة $h$ زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب

❸ إنشاء $(C_h)$:






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# 05 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)**

❶ تعيين $D_f$:

$$x^2-4x+3\neq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3)\neq 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-1\neq 0 \\ x-3\neq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

إذن: $D_f=\mathbb{R}-\{1;3\}$

❷ حساب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}-\{1;3\}$ معناه الدالة $f$ معرفة على المجال: $]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;+\infty[$

لدينا إشارة المقام كالآتي:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x^2-4x+3)$ | $+$ | $0$ | | $-$ | | $0$ | $+$ |

حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{3x^2}{x^2}\right]=3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2}{x^2}\right]=3$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}}[f(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}}\left[\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right]=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}}[f(x)]=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to3\\ <}}[f(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to3\\ <}}\left[\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right]=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to3\\ >}}[f(x)]=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

تفسير النتائج هندسيا:

- $y=3$ معادلة مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x=1$ معادلة مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ مواز لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$
- $x=3$ معادلة مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ مواز لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$

❸ دراسة إتجاه تغير الدالة $f$:

لدينا الدالة $f$ معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها

أولا: نحسب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(3x-12)(x^2-4x+3)-(2x-4)(3x^2-12x+10)}{(x^2-4x+3)^2}$$
$$=\frac{-2x+4}{(x^2-4x+3)^2}$$

ثانيا: ندرس إشارة $f'(x)$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا $(x^2-4x+3)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x+4)$

لدينا: $-2x+4=0$ ومنه $-2x=-4$ ومنه $x=2$

**ثالثا: جدول التغيرات:**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ |
| $f(x)$ | $3$ | ↗ | $+\infty$ $\|$ $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ $\|$ $+\infty$ | ↘ $3$ |

❹ إيجاد نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات:

**مع محور التراتيب:**

$$f(0)=\frac{3(0)^2-12(0)+10}{(0)^2-4(0)+3}=\frac{10}{3}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(yy')=\left\{\left(0;\frac{10}{3}\right)\right\}$$

**مع محور الفواصل:**

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}=0\Rightarrow\begin{cases}3x^2-12x+10\ldots(1)\\ \text{و}\\ x^2-4x+3\neq0\end{cases}$$

نحل $(1)$ نجد:

$$\Delta=(-12)^2-4(3)(10)=24$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{12-\sqrt{24}}{6}\\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{12+\sqrt{24}}{6}\end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(\frac{12-\sqrt{24}}{6};0\right),\left(\frac{12+\sqrt{24}}{6};0\right)\right\}$$

❺

أ/ تبيين أنه إذا كان $x\in D_f$ فإن $(4-x)\in D_f$:

لدينا $x\in D_f$ ومنه: $x\in\,]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;+\infty[$

ومنه: $x\in\,]3;+\infty[$ أو $x\in\,]1;3[$ أو $x\in\,]-\infty;1[$

ومنه: $x>3$ أو $1<x<3$ أو $x<1$

ومنه: $-x<-3$ أو $-3<-x<-1$ أو $-x>-1$

ومنه: $4-x<1$ أو $1<4-x<3$ أو $4-x>3$

ومنه: $(4-x)\in\,]-\infty;1[$ أو $(4-x)\in\,]1;3[$ أو $(4-x)\in\,]3;+\infty[$

إذن: $(4-x)\in\,]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;+\infty[$

ب/ تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ $(C_f)$:

أولا نثبت أنّ $(2(2)-x)\in D_f$

من السؤال السابق لدينا: $(4-x)\in D_f$

ثانيا نثبت أنّ $f(2(4)-x)=f(x)$:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

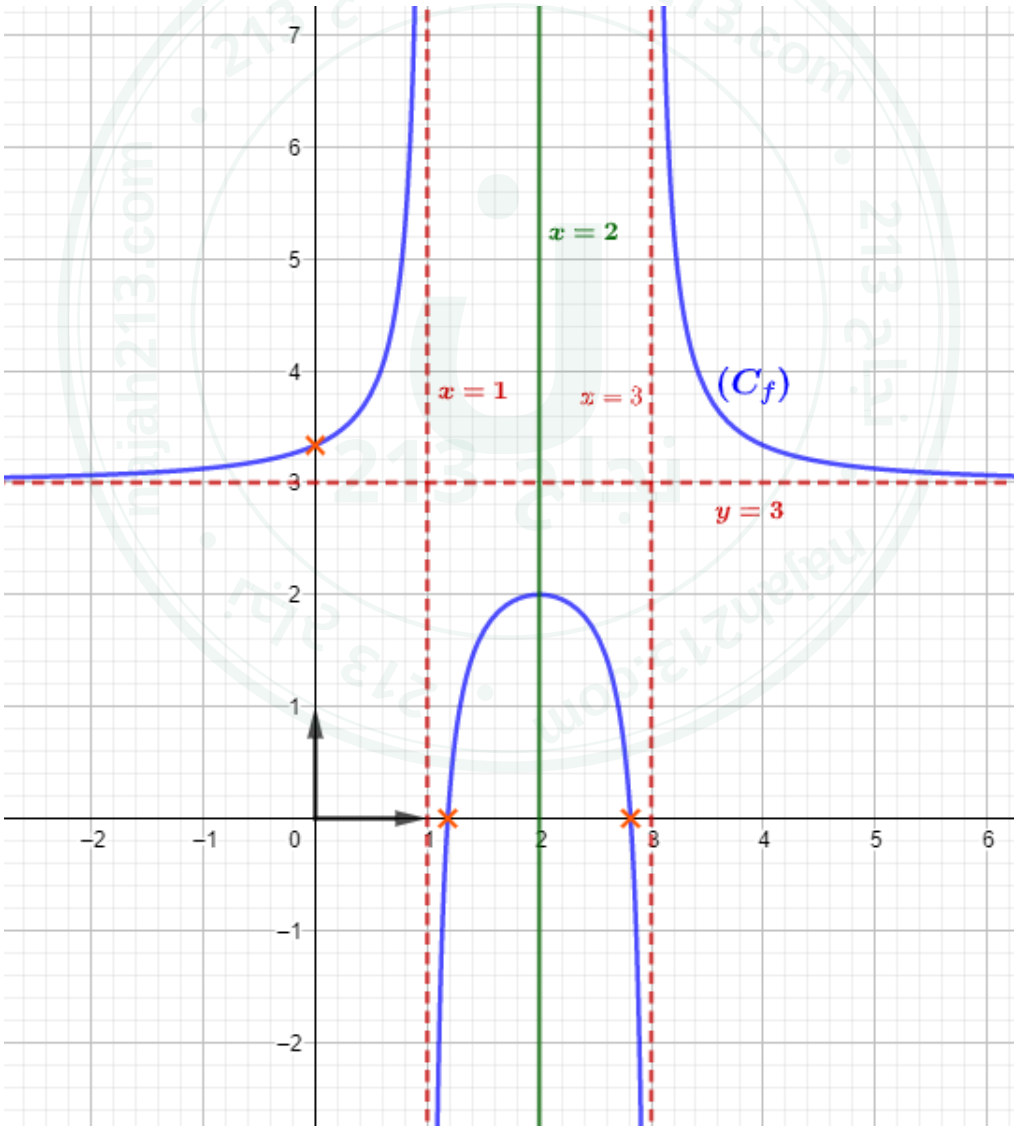
$$f(4-x)=\frac{3(4-x)^2-12(4-x)+10}{(4-x)^2-4(4-x)+3}$$
$$=\frac{3(4^2-2(4)(x)+x^2)-48+12x+10}{4^2-2(4)(x)+x^2-16+4x+3}$$
$$=\frac{3(16-8x+x^2)-38+12x}{x^2-4x+3}$$
$$=\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}=f(x)$$

اذن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ $(C_f)$.

❻ التمثيل البياني للمنحني $(C_f)$:

خطوات إنشاء المنحنى $(C_f)$ على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y=3$ و $x=1$ و $x=3$
- نرسم المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ $(C_f)$
- نعين نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات $(xx')$ و $(yy')$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$




❼ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=|m|$، وهي:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| لما | $\|m\| < 2$ | أي لما | $-2 < m < 2$ | أي لما | $m \in ]-2;2[$ |
| للمعادلة حلين موجبين | | | | | |
| لما | $\|m\| = 2$ | أي لما | $m = 2$ أو $m = -2$ | أي لما | $m = \{-2;2\}$ |
| للمعادلة حل مضاعف موجب | | | | | |
| لما | $2 < \|m\| \leq 3$ | أي لما | $-3 \leq m \leq 3$ و $m > 2$ أو $m < -2$ | أي لما | $m \in [-3;-2[ \cup ]2;3]$ |
| المعادلة لا تقبل حلول | | | | | |
| لما | $\|m\| > 3$ | أي لما | $m > 3$ أو $m < -3$ | أي لما | $m \in ]-\infty;-3[ \cup ]3;+\infty[$ |
| للمعادلة حلين موجبين | | | | | |

**II)**

❶ دراسة شفعية الدالة $h$:

$$h(-x) = \frac{3(-x)^2 - 12|-x| + 10}{(-x)^2 - 4|-x| + 3} = \frac{3x^2 - 12|x| + 10}{x^2 - 4|x| + 3} = h(x)$$

إذن الدالة $h$ زوجية

❷ توضيح كيف يتم رسم $(C_h)$ انطلاقا من $(C_f)$ :

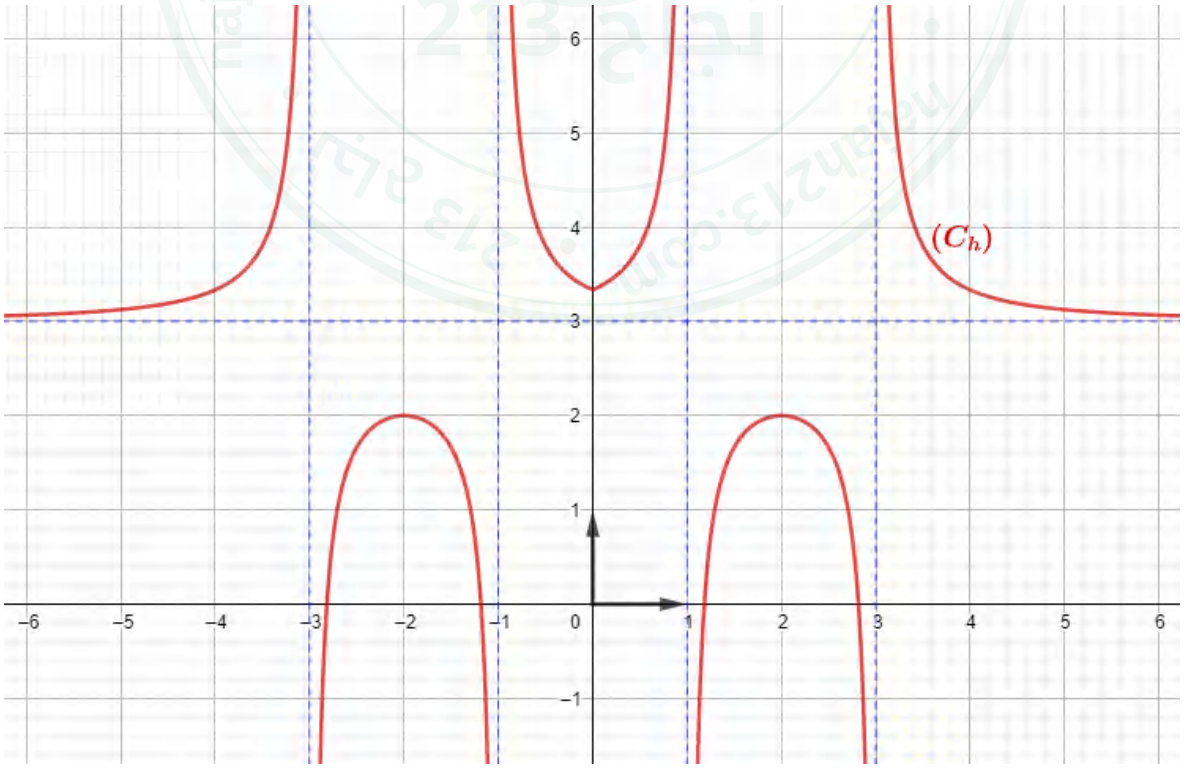
لدينا:

$$h(x) = \frac{3x^2 - 12|x| + 10}{x^2 - 4|x| + 3} = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \; ; \; x \geq 0 \\ \dfrac{3x^2 + 12x + 10}{x^2 + 4x + 3} \; ; \; x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(x) \; ; \; x \geq 0 \\ \dfrac{3x^2 + 12x + 10}{x^2 + 4x + 3} \; ; \; x \leq 0 \end{cases}$$

إذن لما $x \geq 0$ $(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ ، وبما أن الدالة $h$ زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب

- رسم $(C_h)$:




الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

## 06 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)** تعيين $\alpha$ و $\beta$ :

لدينا: $f$ تقبل قيمة حدية عند 0 معناه: $f'(0) = 0$

نعيّن أولا $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2\alpha x + \beta)(x-1) - (\alpha x^2 + \beta x + 1)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2\alpha x^2 - 2\alpha x + \beta x - \beta - \alpha x^2 - \beta x - 1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{\alpha x^2 + (-2\alpha - \beta)x - \beta - 1}{(x-1)^2}$$

لدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

$$\frac{\alpha(0)^2 + (-2\alpha - \beta)(0) - \beta - 1}{(0-1)^2} = 0 \Rightarrow -\beta - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\beta = -1}$$

ولدينا: $f(2) = 3$ ، ومنه:

$$\frac{\alpha(2)^2 + \beta(2) + 1}{2-1} = 3 \Rightarrow 4\alpha + 2\beta = 2$$
$$\Rightarrow 2\alpha + (-1) = 1$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

**II)** نضع فيما يلي: $\alpha = 1$ و $\beta = -1$:

❶ حساب: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ :

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\right)$$
$$= \frac{1}{0^+}$$
$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\right)$$
$$= \frac{1}{0^-}$$
$$= -\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 1$

❷ حساب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ :

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (x)$$
$$= +\infty$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-1}\right) = -\infty$

❸

أ/ تبيين أنّ: $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1}$$
$$= \frac{x(x-1)+1}{x-1}$$
$$= \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

ب/ استنتاج أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ :

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x+\frac{1}{x-1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x-1}\right] = 0$$

ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ بجوار $\pm\infty$ معادلته : $y_{(\Delta)} = x$

ج/ دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{x-1}$$

لدينا: $x-1=0$ معناه: $x=1$ ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y_{(\Delta)}$ | $-$ | ‖ | $+$ |

ومنه: • $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما $x \in ]-\infty;1[$ .

• $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ لما $x \in ]1;+\infty[$ .

❹

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة $f$ ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(x-1)^2 > 0$ ومنه الإشارة من $x(x-2)$:

لدينا:

$$x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ x-2=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ x=2 \end{cases}$$

ومنه:

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

- جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $\|\|$ | $+\infty$ | ↘ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | | | $\|\|$ | $3$ | | | |

❺ تبيين أنّ $\omega$ مركز تناظر لـ $(C_f)$:

- ايجاد إحداثيي النقطة $\omega$:

نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم $(\Delta)$: نجد: $y = 1$

ومنه: $\omega(1;1)$

- تبيين أن النقطة $\omega$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ :

• لدينا: $x \in D_f$

معناه: $x \in \ ]-\infty;1[ \cup \ ]1;+\infty[$

معناه: $x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $(-x) > -1$ أو $(-x) < -1$

معناه: $(2(1) - x) > 1$ أو $(2(1) - x) < 1$

معناه: $(2(1) - x) \in \ ]-\infty;1[ \cup \ ]1;+\infty[$

معناه: $(2(1) - x) \in D_f$

• ولدينا:

$$f(2(1)-x)+f(x) = \frac{(2-x)^2-(2-x)+1}{(2-x)-1} + \frac{x^2-x+1}{x-1}$$
$$= \frac{4-4x+x^2-2+x+1}{2-x-1} + \frac{x^2-x+1}{x-1}$$
$$= \frac{x^2-3x+3}{-(x-1)} + \frac{x^2-x+1}{x-1}$$
$$= \frac{-x^2+3x-3}{x-1} + \frac{x^2-x+1}{x-1}$$
$$= \frac{-2x-2}{x-1}$$
$$= \frac{2(x-1)}{x-1}$$
$$= 2 = 2(1)$$

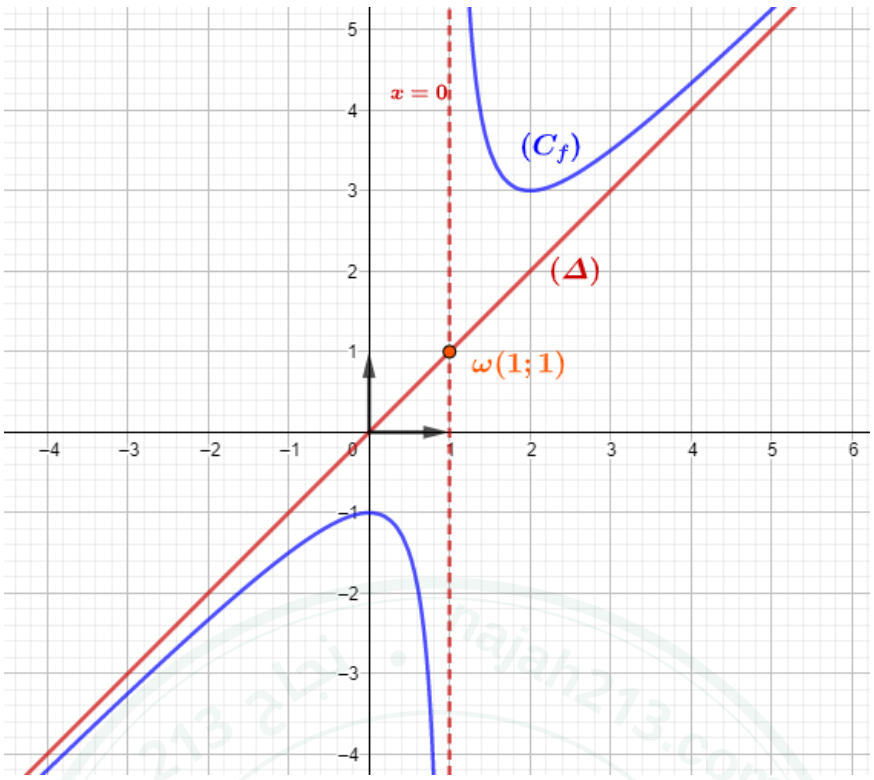
إذن النقطة $\omega$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$

❻ رسم كل من $(\Delta)$ و $(C_f)$ :

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com




❼ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $(E)$ هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = x$ ، وهي:

لما $m \in ]-\infty;-1[$ للمعادلة حل موجب

لما $m = -1$ للمعادلة حل معدوم

لما $m \in ]-1;0[$ للمعادلة حل سالب

لما $m = 0$ المعادلة لا تقبل حلولا

لما $m \in ]0;+\infty[$ للمعادلة حل موجب

**III)**

❶ دراسة شفعية الدالة $h$:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

ومنه الدالة $h$ زوجية

❷ توضيح كيف يمكن إنشاء المنحنى $(C_h)$ :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه $(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة $h$ زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# 07 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

❶ إيجاد الأعداد $a, b, c$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$$
$$= \frac{ax^2 - 3ax + bx - 3b + c}{x-3}$$
$$= \frac{ax^2 + (b-3a)x - 3b + c}{x-3}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -8 \\ -3b + c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 5 + \frac{1}{x-3}$$

❷

أ/ استنتاج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$:

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (x-5)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x - 5 + \frac{1}{x-3} - (x-5)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x-3}\right] = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 5$ مقارب مائل بجوار $\pm\infty$

ب/ تحديد وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$:

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{1}{x-3}$$

لدينا: $1 > 0$ ، إذن الإشارة من إشارة المقام: $(x-3)$:

| $x$ | $-\infty$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x-3}$ | $-$ | ‖ | $+$ |
| الوضعية | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | ‖ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

❸ دراسة تغيرات الدالة $f$:

أولا: حساب النهايات:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ <}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ <}}\left[x - 5 + \frac{1}{x-3}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ <}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ >}}\left[x - 5 + \frac{1}{x-3}\right] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2 - 8x + 16}{x-3}\right]$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[x] = -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-8x+16}{x-3}\right]$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty$$

**التفسير الهندسي:**

المستقيم $x = 3$ مستقيم مقارب عمودي لـ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$.

**ثانيا: حساب $f'(x)$:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

لدينا: $(x-3)^2 > 0$ ومنه الإشارة من $(x^2-6x+8)$:

$$\Delta = 36 - 4(1)(8) = 4 > 0$$
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-2}{2} = 2 \\ x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+2}{2} = 4 \end{cases}$$

**ثالثا: جدول التغيرات:**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-4$ | ↘ | $\|\|$ | $+\infty$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

❹ **إيجاد إحداثي النقطة $\omega$:**

$$\begin{cases} y = x - 5 \dots (1) \\ x = 3 \dots (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) نجد: $y = 3 - 5 = -2$ ومنه : $\omega(3;-2)$

- **اثبات أنّ $\omega$ مركز تناظر للمنحني $(C_f)$:**

**أولا نثبت أنّ $(2(3)-x) \in D_f$**

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in ]-\infty;3[ \cup ]3;+\infty[$

معناه: $x \in ]-\infty;3[$ أو $x \in ]3;+\infty[$ معناه: $x < 3$ أو $x > 3$ معناه: $-x > -3$ أو $-x < -3$

معناه: $6-x > 3$ أو $6-x < 3$ معناه: $(6-x) \in ]-\infty;3[$ أو $(6-x) \in ]3;+\infty[$

إذن: $(6-x) \in ]-\infty;3[ \cup ]3;+\infty[$

**ثانيا نثبت أنّ $f(2(3)-x)+f(x) = 2(-2)$:**

لدينا:

$$f(6-x)+f(x) = 6-x-5+\frac{1}{6-x-3}+x-5+\frac{1}{x-3}$$
$$= \frac{1}{3-x}+\frac{1}{x-3}-4$$
$$= \frac{1}{3-x}-\frac{1}{3-x}-4 = -4$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

إذن النقطة $\omega(3;-2)$ هي مركز تناظر لـ $(C_f)$.

❺ التمثيل البياني:

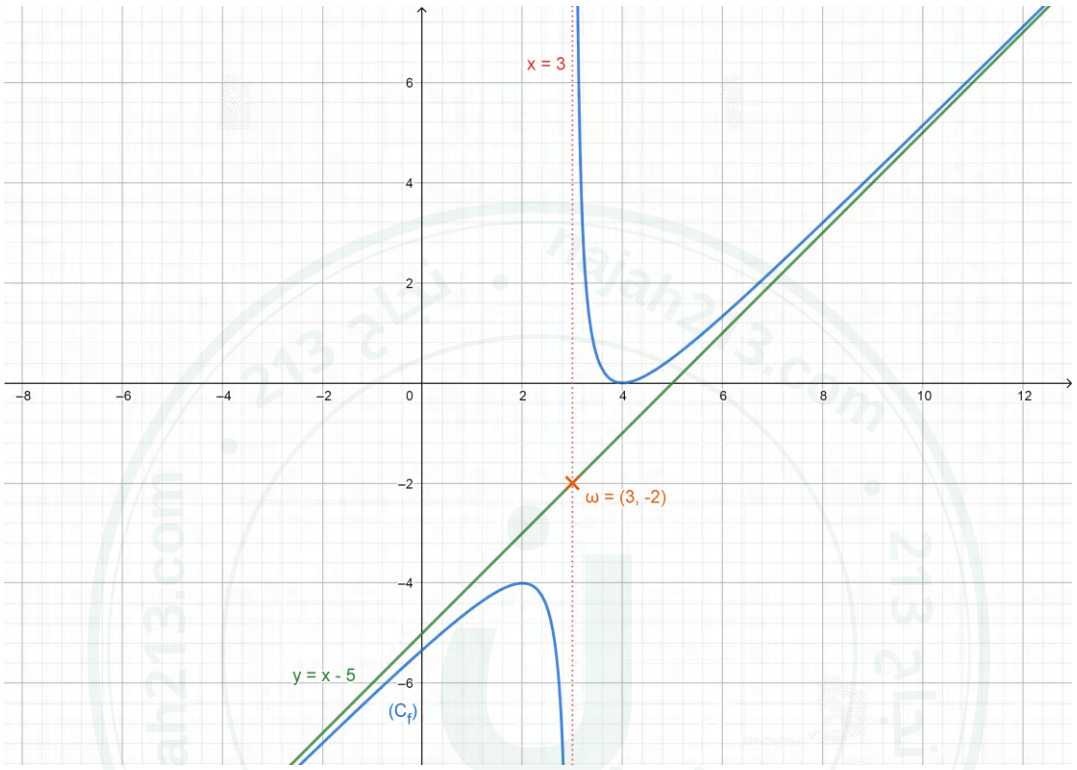
خطوات إنشاء المنحنى $(C_f)$ على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة: $x=3$

نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y=x-5$ .

نعين $\omega$ مركز تناظر المنحنى $(C_f)$

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$




❻ استنتاج رسم المنحني $(C_h)$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(x-4)^2}{|x-3|} \\ &= \frac{|(x-4)^2|}{|x-3|} \\ &= \left|\frac{x^2-8x+16}{x-3}\right| \\ &= |f(x)| \end{aligned}$$

ومنه:

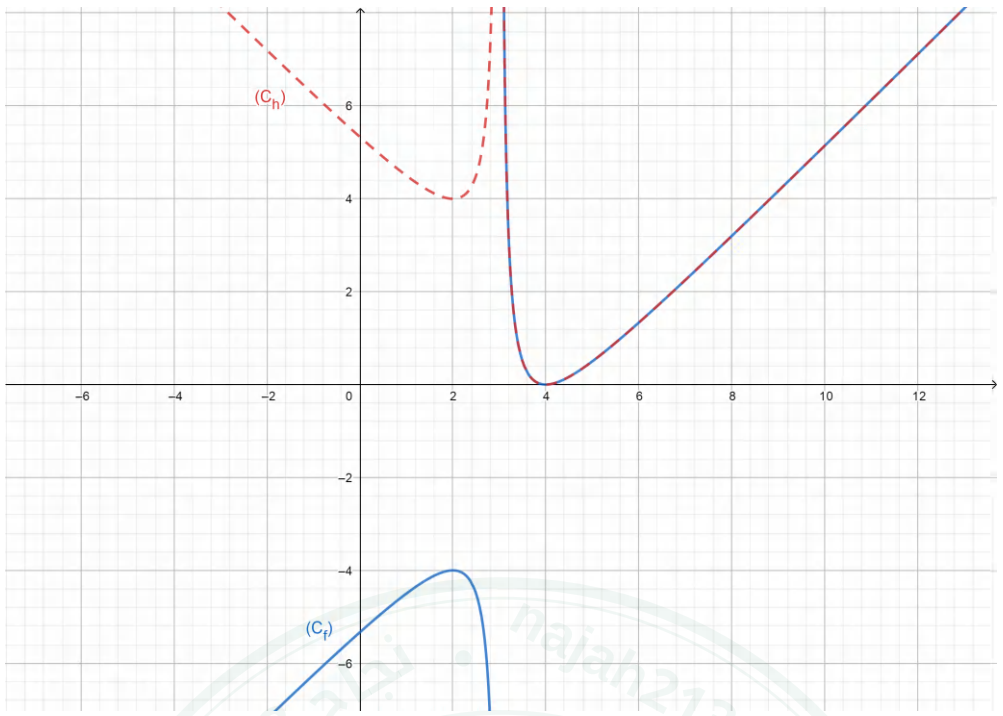
$(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ إذا كان $f(x)\geq 0$

$(C_h)$ يناظر $(C_f)$ بالنسبة إلى محور الفواصل $(xx')$ إذا كان $f(x)\leq 0$.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com




najah213.com • نجاح 213

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

# 08 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

## I)

❶ دراسة تغيرات الدالة $g$:

**أولا: حساب النهايات:**

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[2x^3-6x^2+6x+3]$
$= \lim\limits_{x\to-\infty}[x^3]$
$= -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[2x^3-6x^2+6x+3]$
$= +\infty$

**ثانيا: حساب $g'(x)$:**

$$g'(x) = 6x^2-12x+6$$
$$= 6(x-1)^2 \geq 0$$

**ثالثا: تغيرات الدالة $g$:**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

❷

أ/ تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ :

لدينا الدالة $g$ رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

ولدينا: $g(-0.4) = -4.88$ و $g(-0.3) = 0.606$

ولدينا: $g(-0.3)\times g(-0.4) < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$

ب/ تحديد حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

## II)

❶ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 أن :

$$f(x) = x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}$$
$$= \frac{(x^2-2x-1)(x-1)-5}{x-1}$$
$$= \frac{(x^2-2x-1)(x-1)-5}{x-1}$$
$$= \frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}$$

❷

أ/ حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[x^2] = +\infty$$
$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}\right]$$
$$= +\infty$$
$$\bullet \lim_{x\to 1^<}[f(x)] = \lim_{x\to x^<_1}\left[x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}\right]$$
$$= \lim_{x\to 1^<}\left[-2-\frac{5}{0^-}\right] = +\infty$$
$$\bullet \lim_{x\to 1^>}[f(x)] = \lim_{x\to 1^>}\left[x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}\right]$$
$$= \lim_{x\to 1^>}\left[-2-\frac{5}{0^+}\right] = -\infty$$

نلاحظ أن المستقيم $(x=1)$ مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$

**ب/ دراسة تغيرات الدالة $f$:**

**أولا: حساب $f'(x)$:**

$$f'(x) = 2x-2+\frac{5}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2(x-1)^3+5}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^3-6x^2+6x+3}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

لدينا $(x-1)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة $g(x)$.

**ثانيا: جدول التغيرات:**

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ ↗ $-\infty$ | ↗ $+\infty$ |

❸ حساب: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x^2-2x-1)]$ :

$$\bullet \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x^2-2x-1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{5}{x-1}\right] = 0$$

المنحني $(C_p)$ الممثل للدالة: $(x^2-2x-1)$ هو منحني تقارب للدالة $f$ بجوار $\pm\infty$

❹ دراسة الوضع النسبي بين $(C_p)$ والمنحني $(C_f)$:

**دراسة إشارة الفرق: $[f(x)-p(x)]$**

لدينا:

$$f(x)-p(x) = -\frac{5}{x-1} = \frac{5}{1-x}$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا: $5 > 0$ إذن الإشارة من إشارة المقام

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) - p(x)$ | $+$ | $-$ | |
| الوضعية | $(C_p)$ فوق $(C_f)$ | $(C_p)$ تحت $(C_f)$ | |

❺ تبيين أن $\left[f(\alpha) = \frac{15}{2(1-\alpha)} - 2\right]$:

يكفي أن نثبت أن: $\left(f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 = 0\right)$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ ، ولدينا:

$$f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 = \alpha^2 - 2\alpha - 1 - \frac{5}{\alpha - 1} - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2$$

$$= \frac{2(\alpha-1)(\alpha^2 - 2\alpha - 1) - 2(5) + 15 + 2\big(2(\alpha-1)\big)}{2(\alpha-1)}$$

$$= \frac{2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2(\alpha-1)}$$

$$= \frac{g(\alpha)}{2(\alpha-1)} = \frac{0}{2(\alpha-1)} = 0$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $0.4 < \alpha < -0.3$

ومنه: $0.3 < -\alpha < 0.4$

ومنه: $1.3 < 1 - \alpha < 1.4$

ومنه: $2.6 < 2(1-\alpha) < 2.8$

ومنه: $\frac{1}{2.8} < \frac{1}{2(1-\alpha)} < \frac{1}{2.6}$

ومنه: $\frac{15}{2.8} - 2 < \frac{15}{2(1-\alpha)} - 2 < \frac{15}{2.6} - 2$

إذن: $3.36 < f(\alpha) < 3.77$

❻ التمثيل البياني لكل من $(C_p)$ و $(C_f)$:

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيم المقارب: $x = 1$

نرسم المنحني المقارب ذو المعادلة $(x^2 - 2x - 1)$.

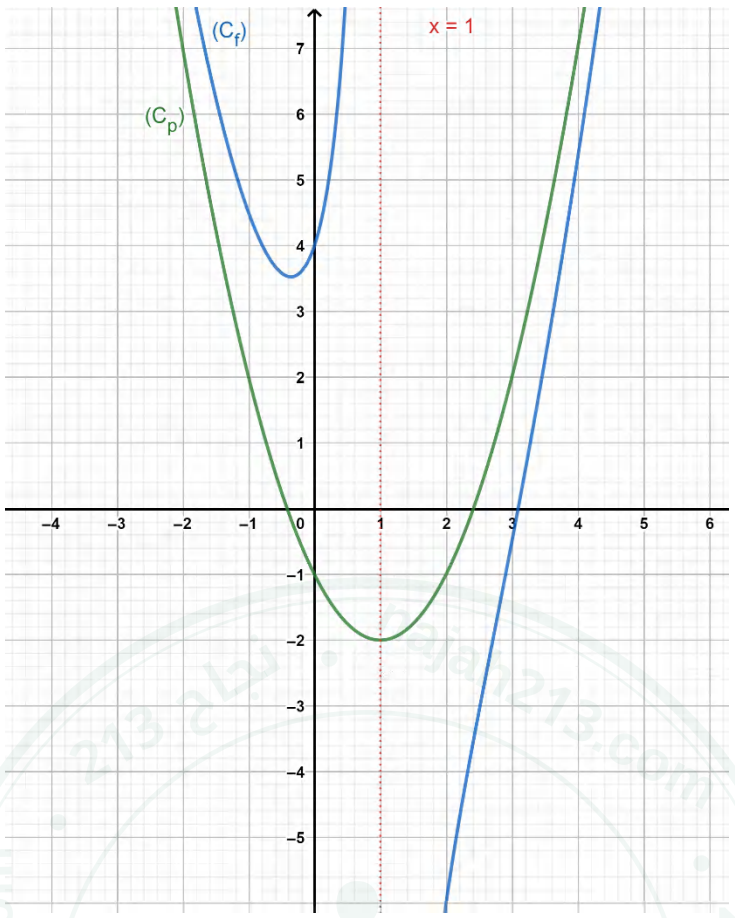
ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

# 09 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)**

**1** تعيين $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$:

لكي تكون الدالة $f$ معرفة يجب أن يكون:

$$x^2-3x+2\neq 0$$
$$(x-1)(x-2)\neq 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-1\neq 0 \\ \text{و} \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \text{و} \\ x\neq 2 \end{cases}$$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\{1;2\}$

- تبين أنه من أجل كل $x$ من $D_f$ فإن: $f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$:

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$$
$$=\frac{a(x-1)(x-2)+b(x-2)+c(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{ax^3+(-3a+b+c)x+(2a-2b-c)}{x^2-3x+2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ -3a+b+c=2 \\ 2a-2b-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+c=5 \\ 2b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5-c \\ c=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=9 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x)=1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}$$

**2**

أ/ دراسة تغيرات الدالة $f$:

**أولا: حساب النهايات:**

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]=1$
- $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]=\lim\limits_{x\to 1}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[-8-\frac{4}{0}\right]=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)]=\lim\limits_{x\to 2}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\left[-3+\frac{9}{0}\right]=+\infty$

**ثانيا: حساب $f'(x)$:**

$$f'(x)=\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{9}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{4(x-2)^2-9(x-1)^2}{(x^2-3x+2)^2}$$
$$=\frac{4(x-2)^2-9(x-1)^2}{(x^2-3x+2)^2}$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$= \frac{-5x^2 + 2x + 7}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$
$$= \frac{(x+1)\left(x - \frac{7}{5}\right)}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

لدينا: المقام $(x^2 - 3x + 2)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$(x+1)\left(x - \frac{7}{5}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ \text{و} \\ x - \frac{7}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{و} \\ x = \frac{7}{5} \end{cases}$$

ثالثا: جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $\frac{7}{5}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $0$ | | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ | $-\infty$ | ↗ | $-24$ | ↘ | $+\infty$ | ↘ $1$ |

ب/ المستقيمات المقاربة للمنحني $(C_f)$:

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$

$x = 1$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$

$x = 2$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ والمقارب الأفقي $(\Delta)$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ :

$$f(x) - y = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} - 1$$
$$= -\frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$$
$$= \frac{-4(x-2) + 9(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{5x - 1}{(x-1)(x-2)}$$

إشارة الكسر من إشارة البسط × إشارة المقام

دراسة إشارة البسط:

$$5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

دراسة إشارة المقام:

$$(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{و} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{و} \\ x = 2 \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{5}$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5x - 1$ | $-$ | | $0$ | $+$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x^2 - 3x + 2$ | $+$ | | $+$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | |
| $f(x) - y$ | $-$ | $0$ | | $-$ | $-$ | | $+$ | | |

- الوضعية:

- $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ لما $x \in \left]\frac{1}{5}; 1\right[ \cup \left]2; +\infty\right[$
- $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما $x \in \left]-\infty; \frac{1}{5}\right[ \cup \left]1; 2\right[$
- $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ لما $x = \frac{1}{5}$

❸ تعيين تقريب تآلفي للدالة $f$ عند 0.

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$$

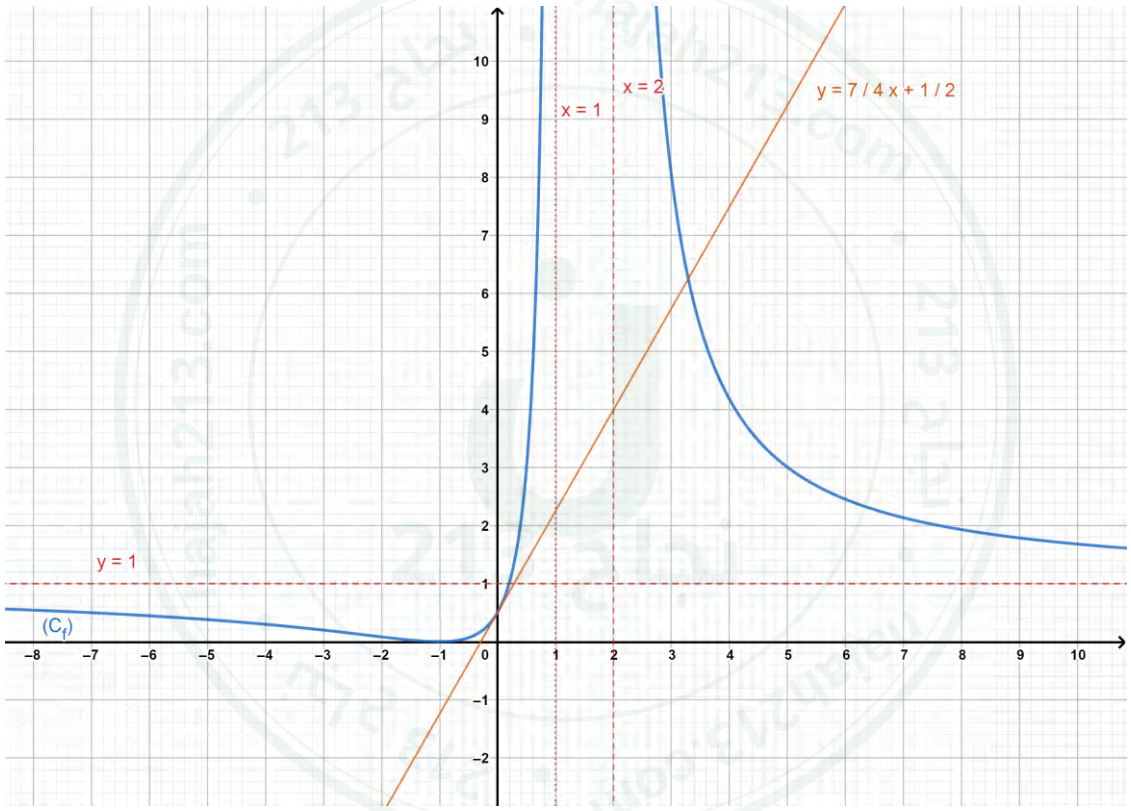
❹ التمثيل البياني:

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 3$

نعين المماس ذو المعادلة $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$




(II

❶ تعيين مجموعة تعريف الدالة $h$:

لتكون الدالة $h$ معرفة يجب أن يكون:

$$x^2 - 3|x| + 2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \neq 0, x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 \neq 0, x < 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x-1) \neq 0 \\ (x+2)(x+1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

ومنه: $D_h = \mathbb{R} - \{-2; -1; 1; 2\}$

❷ كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}, x\geq 0\\ \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}, x<0\end{cases}$$

لاحظ أنه لما $x\geq 0$ فإنه $h(x)=f(x)$

❸ دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة $h$ عند 0 :

◀ عندما تتساوى النهايتان من اليمين واليسار عند $a$ وكلا النهايتان تساوي $f(a)$، نقول أن الدالة مستمرة عند ذلك العدد ▶

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}\right]=\left[\frac{0^2-2(0)+1}{0^2+3(0)+2}\right]=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}\right]=\left[\frac{0^2-2(0)+1}{0^2+3(0)+2}\right]=\frac{1}{2}$$

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[h(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}[h(x)]=\frac{1}{2}$ فإن: الدالة $h$ مستمرة عند 0.

- قابلية الاشتقاق عند 0:

$$\bullet\ \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}-\frac{1}{2}}{x}\right]$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{2x^2+4|x|+2-x^2+3|x|-2}{2x(x^2-3|x|+2)}\right]$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{x^2+7x}{2x(x^2-3|x|+2)}\right]$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{x+7}{2(x^2-3|x|+2)}\right]=\frac{7}{4}$$

$$\bullet\ \lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[\frac{\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}-\frac{1}{2}}{x}\right]$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[\frac{x^2+7|x|}{2x(x^2-3|x|+2)}\right]$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{x-7}{2(x^2-3|x|+2)}\right]=-\frac{7}{4}$$

بما أن النهايتين غير متساويتين نقول أن: الدالة $h$ غير قابلة للاشتقاق عند 0.

ومنه المنحنى $(C_h)$ يقبل نصفي مماسيين معامل توجيه كل منهما: $\frac{7}{4}$ و $-\frac{7}{4}$

❹ دراسة شفعية الدالة $h$:

$$h(-x)=\frac{(-x)^2+2|-x|+1}{(-x)^2-3|-x|+2}=\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}=h(x)$$

❺ استنتاج التمثيل البياني $(C_h)$ للدالة $h$ انطلاقا من $(C_f)$:

لدينا:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}, x\geq 0\\ \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}, x<0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}f(x), x\geq 0\\ f(-x), x<0\end{cases}$$

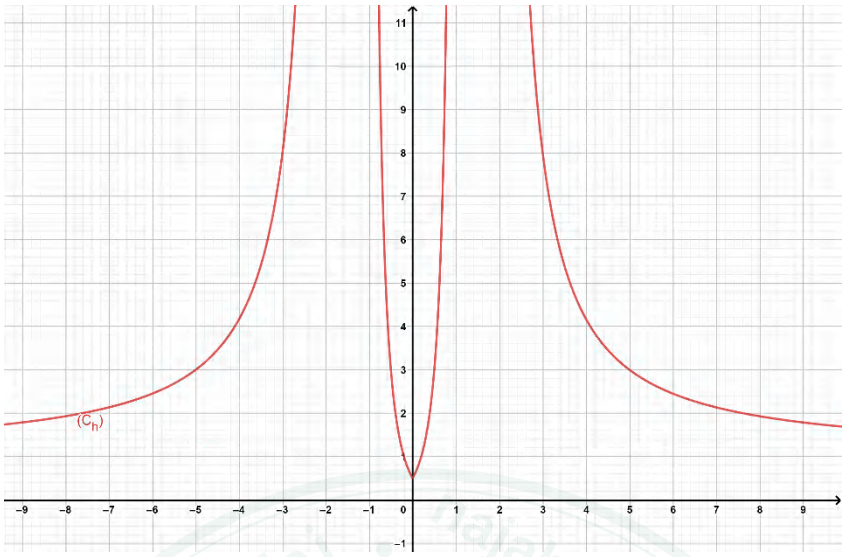
الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لما $x \geq 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$ ، ومنه منحني الدالة $h$ ينطبق على $(C_f)$ لما $x \geq 0$

ولما $x < 0$ لدينا: $h(x) = f(-x)$ ، ومنه $(C_h)$ يناظر منحني الدالة $f$ بالنسبة لمحور التراتيب لما $x < 0$




### ❻ المناقشة البيانية:

لدينا:

$$(m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m - 1 = 0$$
$$\Rightarrow mx^2 - x^2 - 3mx - 2x + 2m - 1 = 0$$
$$\Rightarrow m(x^2 - 3x + 2) = x^2 + 2x + 1$$
$$\Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$
$$\Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

ومنه: $m = h(x)$ لما: $x \geq 0$

إذن المناقشة كالآتي:

| | | |
|---|---|---|
| لما: | $m < \frac{1}{5}$ | المعادلة لا تقبل حلول |
| لما: | $m = \frac{1}{5}$ | المعادلة تقبل حلا مضاعفا |
| لما: | $1 \geq m > \frac{1}{5}$ | المعادلة تقبل حلا وحيدا |
| لما: | $m > 1$ | المعادلة تقبل حلان |

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

## 10 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)**

❶ برهان أن $G$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$G$ مجموع دالتين قابلتين للاتشقاق على $\mathbb{R}$ إذن $G$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- حساب $G'(x)$:

$$G'(x) = F'(x) - F'(-x)$$
$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(-x)^2+1}$$
$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

ومنه الدالة $G$ ثابتة.

❷ حساب $G(0)$ :

$$G(0) = F(0) - F(-0) = 0$$

- استنتاج أن $G$ فردية:

بما أن الدالة $G$ ثابتة، اذن من كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $F(x) + F(-x) = 0 \Leftrightarrow F(-x) = -F(x)$

ومنه الدالة $F$ فردية

**II)**

❶ تبرير أنّ $H$ تقبل الاشتقاق على $I$ وحساب $H'(x)$ :

$H$ مجموع دالتين قابلتين للاتشقاق على $\mathbb{R}_+^*$ إذن $H$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

$$H'(x) = F'(x) + \left[F\left(\frac{1}{x}\right)\right]'$$
$$= F'(x) - \frac{1}{x^2}F'(x)$$
$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}$$
$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

ومنه الدالة $H$ ثابتة.

❷ برهان أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$:

$$H(1) = F(1) + F\left(\frac{1}{1}\right) = 2F(1)$$

وبما أن الدالة $H$ ثابتة فإنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$ فإنه:

$$H(x) = 2F(1)$$

❸ استنتاج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x)] = 2F(1)$ :

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[H(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}[F(x)] + F(0) = \lim_{x\to+\infty}[F(x)]$$

ومنه:

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$2F(1) = \lim_{x\to+\infty}[F(x)]$$

الاستنتاج: $(C_f)$ يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

وبما أن $F$ فردية فإن $(C_f)$ يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

**III)**

❶ حساب $T'(x)$:

$$\begin{aligned} T'(x) &= [F(\tan x) - x]' = (\tan' x)F'(\tan x) - 1 \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\frac{1}{\tan^2 x + 1}\right) \\ &= (1 + \tan^2 x)\left(\frac{1}{\tan^2 x + 1}\right) - 1 \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

ومنه $T$ دالة ثابتة.

❷ حساب $F(1)$:

لدينا: $0 \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ومنه $0 \in D_T$ أي:

$$T(0) = F(\tan 0) - 0 = F(0) - 0 = 0 - 0 = 0$$

وبما أن $T$ ثابتة فإنه من أجل كل $x \in D_T$ فإنه $T(x) = 0$ ، إذن:

$$F(\tan x) = T(x) + x = 0 + x = x$$

ولدينا من جهة أخرى: $F(\tan x) = F(1)$ أي $\tan x = 1$

وهذا يكافئ: $x = \frac{\pi}{4}$ لأن: $x \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ، إذن: $F(1) = F\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

**IV)**

❶ انجاز جدول تغيرات الدالة $F$ على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة $F'$ موجبة تماما ومنه الدالة $F$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

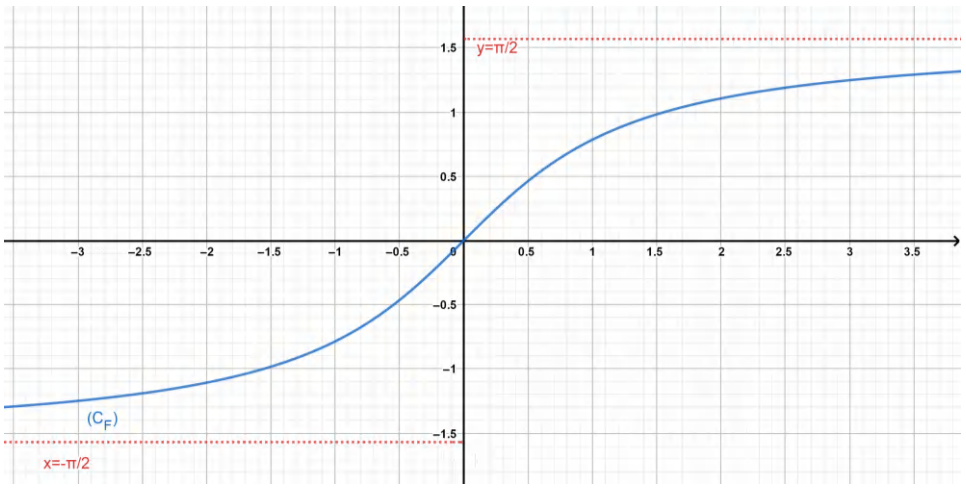
ولدينا $\lim_{x\to+\infty}[F(x)] = 2F(1)$ و $F(1) = \frac{\pi}{4}$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}[F(x)] = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

وبما أن الدالة $F$ فردية فإن: $\lim_{x\to-\infty}[F(x)] = -\frac{\pi}{2}$ ، ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $+$ | |
| $F(x)$ | $\frac{-\pi}{2}$ | $0$ ↗ | $\frac{\pi}{2}$ |

❷ رسم المنحنى $(C_f)$ والمستقيمات المقاربة:






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# 11 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)**

**1**

أ/ حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x^3-3x^2+3x-5]$
  $= \lim\limits_{x\to-\infty}[x^3]$
  $= -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x^3-3x^2+3x-5]$
  $= \lim\limits_{x\to+\infty}[x^3] = -\infty$

ب/ دراسة تغيرات الدالة $g$:

أولا: حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2-6x+3$$

معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستعمل المميز $\Delta$،

$$\Delta = (-6)^2-4(3)(3) = 0$$

ومنه المعادلة لها حل مضاعف هو:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

ومنه:

$$g'(x) = 3x^2-6x+3 = 3(x-1)^2$$

لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة $g$ متزايدة تماما.

ولدينا $g'(1) = 0$ ، ومنه الدالة $g$ تنعدم ولا تغير اشارتها.

ثانيا: جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**2**

أ/ تبيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$:

لدينا الدالة $g$ مستمرة ومتزايدة على مجال تعريفها ،

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$ و $g(2) = -3$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] \times g(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]2;+\infty[$.

ب/ حصر العدد $\alpha$:

| $\alpha$ | 2 | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.7 | 2.8 | ... | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(\alpha)$ | $-3$ | $-2.6$ | $-2.2$ | $-1.8$ | $-1.2$ | $-0.6$ | 0.1 | 1.8 | ... | $+\infty$ |

من الجدول نلاحظ أن: $2.5 < \alpha < 2.7$





فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ج/ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**(II**

❶ تعيين نهايات الدالة $f$ عند أطرف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right]$
$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2}\right]$
$= \lim\limits_{x\to-\infty}[x]$
$= -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}[x]$
$= +\infty$
- $\lim\limits_{x\to1}[f(x)] = \lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right]$
$= \lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{2}{0^+}\right]$
$= +\infty$

❷ تحديد الأعداد الحقيقية $a, b, c$:

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2+c}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{ax^3+x^2(-2a+b)+x(a-2b)+b+c}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=-3 \\ a-2b=3 \\ b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x-1+\frac{2}{(x-1)^2}$$

❸

أ/ تبيين أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا $(d)$:

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x-1+\frac{2}{(x-1)^2}-(x-1)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2}{(x-1)^2}\right] = 0$$

ومنه المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي للمستقيم $(d)$ والمنحنى $(C_f)$:

دراسة إشارة الفرق: $f(x)-y$:

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$f(x)-y=\frac{2}{(x-1)^2}>0$$

ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $+$ | ‖ | $+$ |
| الوضعية | $(d)$ فوق $(C_f)$ | ‖ | $(d)$ فوق $(C_f)$ |

❹

أ/ دراسة تغيرات الدالة $f$:

أولا: حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{(x-1)^3-4}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط في المقام

ثانيا: جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $\alpha$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x-1)^3$ | $-$ | $+$ | ‖ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | $+\infty$ ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ $+\infty$ |

ب/ تبيين أنّ $(C_f)$ يقطع مرة وحيدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $\beta$ :

لدينا: $f(-1)=-1.5$ و $f(0)=1$

ولدينا $f(-1)\times f(0)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ حيث: $-1\leq\beta\leq 0$

ج/ تبيين أن $f(\alpha)=\frac{6}{(\alpha-1)^2}$:

يكفي أن نثبت أن: $f(\alpha)-\frac{6}{(\alpha-1)^2}=0$:

لدينا سابقا: $g(\alpha)=0$ ، إذن:

$$f(\alpha)-\frac{6}{(\alpha-1)^2}=\alpha-1+\frac{2}{(\alpha-1)^2}-\frac{6}{(\alpha-1)^2}$$
$$=\frac{(\alpha-1)(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2}+\frac{2}{(\alpha-1)^2}-\frac{6}{(\alpha-1)^2}$$
$$=\frac{\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-5}{(\alpha-1)^2}$$
$$=\frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\frac{0}{(\alpha-1)^2}=0$$

حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $2.5<\alpha<2.7$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

ومنه: $1.5 < \alpha - 1 < 1.7$

ومنه: $2.25 < (\alpha - 1)^2 < 2.89$

ومنه: $\frac{1}{2.89} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{2.25}$

ومنه: $\frac{6}{2.89} < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < \frac{6}{2.25}$

إذن: $2.07 < f(\alpha) < 2.66$

❺ إنشاء $(C_f)$:

حساب $f(0)$:

$$f(0) = 0 - 1 + \frac{2}{(0-1)^2} = 1$$

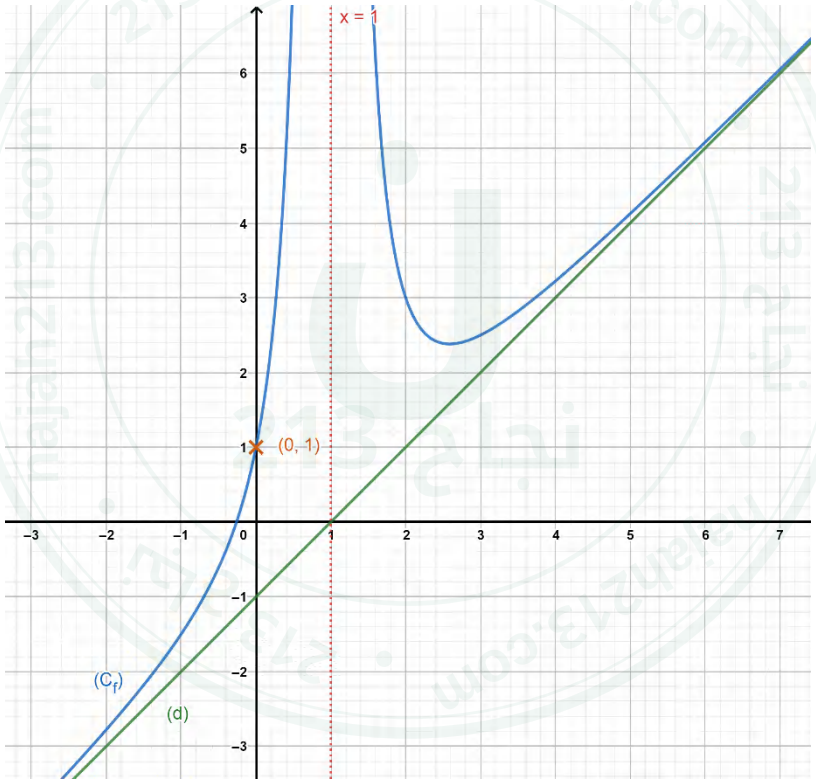
خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$

نرسم المستقيم المقارب المائل $(d)$ ذو المعادلة $y = x - 1$

نعين نقطة تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع $(yy')$

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$




**III)**

❶ تبين أن $h$ زوجية:

لدينا: $x \in D_h$ معناه: $x \in ]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

معناه: $x < -1$ أو $-1 < x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $-x > 1$ أو $1 > -x > -1$ أو $-x < -1$

معناه: $(-x) \in ]1; +\infty[$ أو $(-x) \in ]-1; 1[$ أو $(-x) \in ]-\infty; -1[$

معناه: $(-x) \in ]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

ومنه: $(-x) \in D_h$

ولدينا: $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$

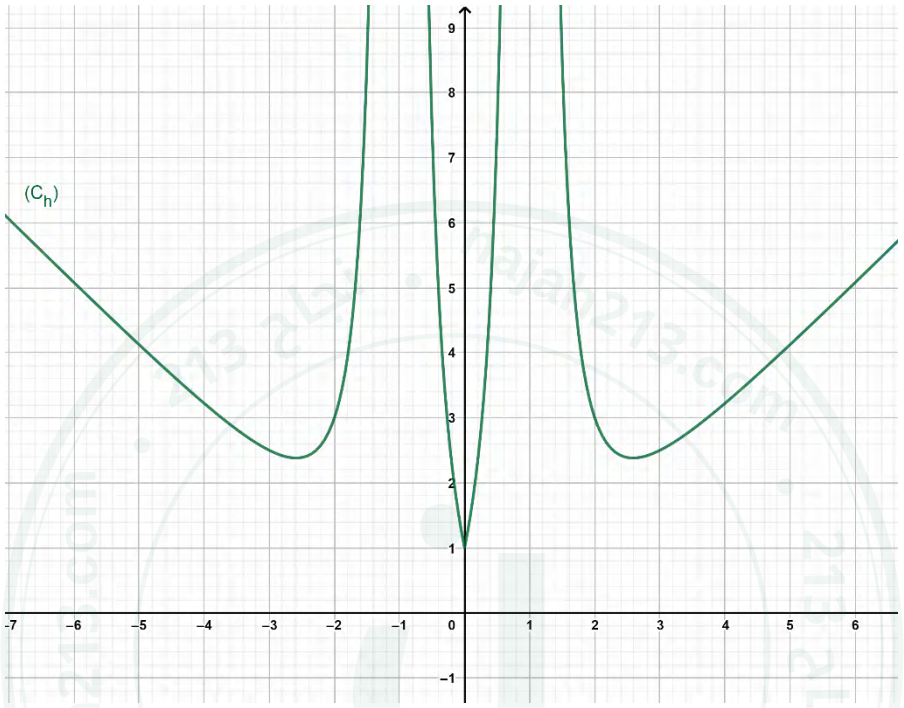
ومنه الدالة $h$ زوجية.

❷ انشاء $(C_h)$:

لدينا: $f(|x|) = h(x)$

ومنه لما $x \geq 0$، يكون $(C_h)$ منطبقا على $(C_f)$

ولما: $x \leq 0$، يكون $(C_h)$ متناظر مع $(C_f)$ بالنسبة إلى محور التراتيب $(yy')$




❸ المناقشة البيانية:

أولا: $f(x) = m$:

| | | |
|---|---|---|
| لما | $m < 1$ | المعادلة تقبل حل وحيد سالب |
| لما | $m = 1$ | المعادلة تقبل حل وحيد معدوم |
| لما | $1 < m < f(\alpha)$ | المعادلة تقبل حل وحيد موجب |
| لما | $m = f(\alpha)$ | المعادلة تقبل حلين موجبين |
| لما | $m > f(\alpha)$ | المعادلة تقبل ثلاث حلول موجبة |

ثانيا: $f(x) = x + m$:

| | | |
|---|---|---|
| لما | $m \leq -1$ | المعادلة لا تقبل حلول |
| لما | $-1 < m < 1$ | المعادلة تقبل حلان متمايزان |
| لما | $m = 1$ | المعادلة تقبل حلان موجبان |
| لما | $m > 1$ | المعادلة تقبل حلان موجبان متمايزان |

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

# حل المسـألة رقم: 12

مشاهـــدة المسألة

**I)**

**1** دراسة تغيرات الدالة $g$:

أولا: حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[2x-\sqrt{1+x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2x-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2x+x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)\right] = -\infty$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$$

ثانيا: حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 2-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ثالثا: دراسة $g'(x)$:

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة البسط:

لما: $x \geq 0$: لدينا:

$$2\sqrt{1+x^2}-x = \frac{\left(2\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(2\sqrt{1+x^2}+x\right)}{2\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$= \frac{4(1+x^2)-x^2}{2\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$= \frac{3x^2+1}{2\sqrt{1+x^2}+x} > 0$$

لما: $x \leq 0$: واضح أن $2\sqrt{1+x^2}-x > 0$

ومنه $g'(x) > 0$ أي أن الدالة $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ .

**2** تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$:

بما أن الدالة $g$ مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا: $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}[g(x)] = -\infty$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] \times \lim_{x\to-\infty}[g(x)] < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$

تعيين $\alpha$:

لدينا: $g(x)=0$ أي:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$2x - \sqrt{1+x^2} \Rightarrow 2x = \sqrt{1+x^2}$$
$$\Rightarrow 4x^2 = 1 + x^2$$
$$\Rightarrow 3x^2 = 1$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

ومنه:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \dots (\text{مقبول}) \\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \dots (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

$x_2$ مرفوض لأن $x \geq 0$.

ومنه $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$

❸ استنتاج إشارة $g(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**(II**

❶

أ/ حساب نهايات الدالة $f$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} - x\right]$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-2x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(2\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}+1\right)\right] = +\infty$$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} - x\right]$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-1\right)\right] = +\infty$$

ب/ حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 2\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$$
$$= \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$.

ج/ جدول تغيرات الدالة $f$:

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $g(x)$ ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ | ↗ $+\infty$ |

❷ حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+3x]$ :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+3x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} - x + 3x\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} + 2x\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(2\sqrt{1+x^2} + 2x\right)\left(2\sqrt{1+x^2} - 2x\right)}{2\sqrt{1+x^2} - 2x}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4(x^2+1) - 4x^2}{2\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{1+x^2} - x}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} - x}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{-x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}\right] = 0$

ومنه المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y = -3x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

❸

أ/ تبيين أن $(d')$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} - x - x\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} - 2x\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(2\sqrt{1+x^2} - 2x\right)\left(2\sqrt{1+x^2} + 2x\right)}{2\sqrt{1+x^2} + 2x}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4(x^2+1) - 4x^2}{2\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}\right]$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}\right] = 0$$

ومنه المستقيم $(d')$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(d)$ :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-3x)$:

$$f(x) + 3x = 2\sqrt{1+x^2} + 2x$$
$$= \frac{2}{-x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)} \geq 0$$

لأن $x < 0$

إشارة الفرق الموجبة ومنه المنحني $(C_f)$ فوق $(d)$.

- دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(d')$ :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x)$:

$$f(x) - x = 2\sqrt{1+x^2} - 2x$$
$$= \frac{2}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)} \geq 0$$

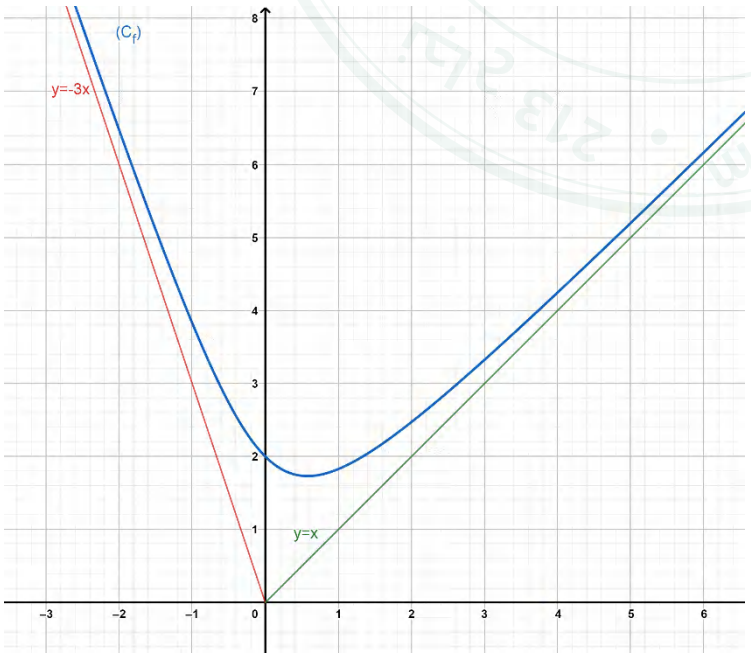
إشارة الفرق الموجبة ومنه المنحنى $(C_f)$ فوق $(d')$.

❹ إنشاء المنحنى $(C_f)$:

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة المائلة: $(d)$ و $(d')$

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$



najah213.com · نجاح 213

# حل المسـألة رقم: 13

مشاهـــدة المسألة

**I)**

❶ دراسة اتجاه تغير الدالة $g$ تشكيل جدول تغيراتها:

- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^3) = +\infty$$

$$g(-1) = -2$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 6x^2 + 12x + 7$$

لحل المعادلة $g'(x) = 0$ نستعمل المميز $\Delta$

لدينا: $\Delta = -24 < 0$، إذن المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ وعليه: $g'(x) > 0$

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-2$ | $+\infty$ |

❷ حساب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0,2)$ و $g(-0,1)$ :

$$g(-0.1) \approx 0.36 \quad ; \quad g(-0.2) \approx -0.018$$

❸ استنتاج أنه يوجد عدد وحيد $\alpha$ من المجال $]-0.2;-0.1[$ حيث: $g(\alpha) = 0$:

لدينا الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $[-0.2;-0.1]$

ولدينا: $g(-0.2) \times g(-0.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-0.2;-0.1[$

❹ استنتاج إشارة الدالة $g$ على المجال $]-1,+\infty[$:

| $x$ | $-1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**II)**

❶

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-1^{>}} f(x)$ :

$$\lim_{x\to-1^{>}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = -1$.

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)]$ :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2}\right)$$

$$= +\infty$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

❷ تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1)+cx}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+cx}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=4 \\ a+2b+c=1 \\ b=0 \end{cases}$

إذن:

$$f(x) = 2x - \frac{x}{(x+1)^2}$$

❸

أ/ تبيين أن المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y=2x$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x] = \lim_{x\to+\infty}\left[2x - \frac{x}{(x+1)^2} - 2x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{(x+1)^2}\right] = 0$$

إذن المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y=2x$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني $(C_f)$ والمستقيم $(D)$ :

$$f(x) - y_{(D)} = 0 \Rightarrow -\frac{x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

إذن:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y_{(D)}$ | $+$ | $0$ | $-$ |

- الوضعية:
  - $(C_f)$ فوق $(D)$ لما $x \in [-1;0[$.
  - $(C_f)$ يقطع $(D)$ لما $x=0$.
  - $(C_f)$ تحت $(D)$ لما $x \in ]0;+\infty[$.

❹

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x$ من $]-1,+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

$$f'(x) = \frac{(6x^2+8x+1)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^3+4x^2+x)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{(6x^2+8x+1)(x+1) - 2(2x^3+4x^2+x)}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{6x^3+8x^2+x+6x^2+8x+1-4x^3-8x^2-2x}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x+1)^3}$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ ، وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(x+1)^3 \geq 0$ لما $x \in D_f$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

| $x$ | $-1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ $+\infty$ |

❺ كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ في النقطة $A$ ذات الفاصلة 2:

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
$$= \frac{55}{27}(x-2) + \frac{34}{9}$$
$$= \frac{55}{27}x - \frac{8}{27}$$

❻ تبيين أن النقطة $A$ نقطة انعطاف للمنحني $(C_f)$:

$(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف معناه أن $f''$ تنعدم وتغير إشارتها:

لدينا:

$$f''(x) = \frac{g'^{(x)}(x+1)^3 - 3(x+1)^2 g(x)}{(x+1)^6}$$
$$= \frac{g'(x)(x+1) - 3g(x)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{(6x^2+12x+7)(x+1) - 3(2x^3+6x^2+7x+1)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{6x^3+12x^2+7x+6x^2+12x+7-6x^3-18x^2-21x-3}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{-2x+4}{(x+1)^4}$$

لدينا: $(x+1)^4 \geq 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط:

$$-2x+4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

| $x$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

المشتقة $f''$ تنعدم عند النقطة ذات الفاصلة 2 وتغير إشارتها، فهي تقبل نقطة انعطاف.

❼ تعيين نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل:

فوصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة: $f(x) = 0$

لدينا:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3+4x^2+x}{(x+1)^2} = 0$$
$$\Rightarrow 2x^3+4x^2+x = 0$$
$$\Rightarrow x(2x^2+4x+1) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ 2x^2+4x+1 = 0 \ldots (*) \end{cases}$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لحل المعادلة $(*)$ نستعمل المميز $\Delta$:

لدينا: $\Delta = 16 - 4(2)(1) = 8$ إذن:

$$x = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{0; \left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

**III)**

❶ تبيين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر للمنحني $(C_h)$:

أولا: نبيّن أنّ $(-2-x) \in D_h$:

لدينا: $x \in D_h$

معناه: $x < -1$ أو $x > -1$ معناه: $(-x) > 1$ أو $(-x) < 1$

معناه: $(-2-x) > -1$ أو $(-2-x) < -1$ معناه: $x \in ]-1, +\infty[ \cup ]-\infty, -1[$

إذن: $(-2-x) \in D_h$

ثانيا: نبيّن أنّ: $h(2(-1)-x) = h(x)$ أي نبيّن أنّ $h(-2-x) = h(x)$:

$$h(-2-x) = \begin{cases} f(-2-x) & ; \quad (-2-x) > -1 \\ f(-(-2-x)-2) & ; \quad (-2-x) < -1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(-2-x) & ; \quad -x > 1 \\ f(2+x-2) & ; \quad -x < 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(-2-x) & ; \quad x > -1 \\ f(x) & ; \quad x > -1 \end{cases}$$
$$= h(x)$$

إذن: $x = -1$ محور تناظر لـ $(C_h)$

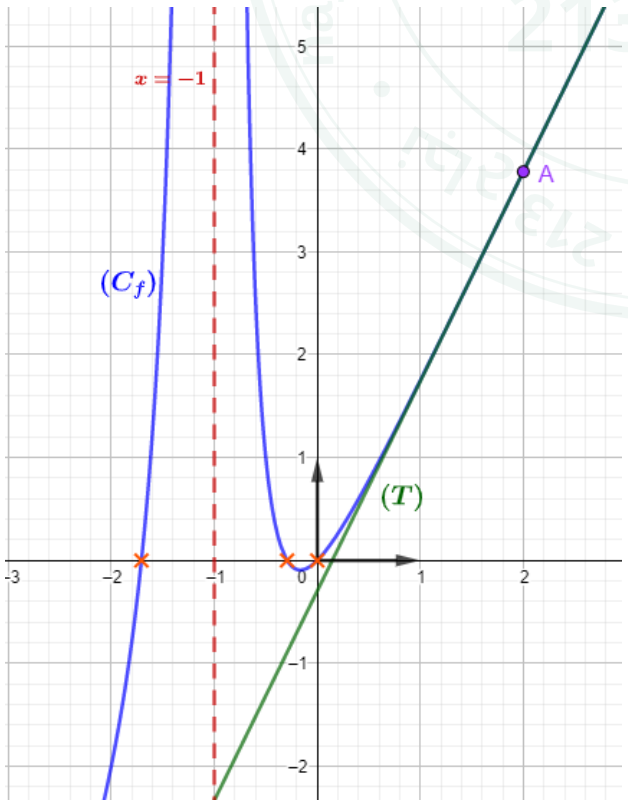
**محور تناظر:**

لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ $(C_f)$ نبين ما يلي:

$$\begin{cases} (2a-x) \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

❷ التمثيل البياني:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$
- نعين نقط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل $(xx')$
- نرسم المماس $(T)$
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة $f$ نرسم $(C_f)$






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

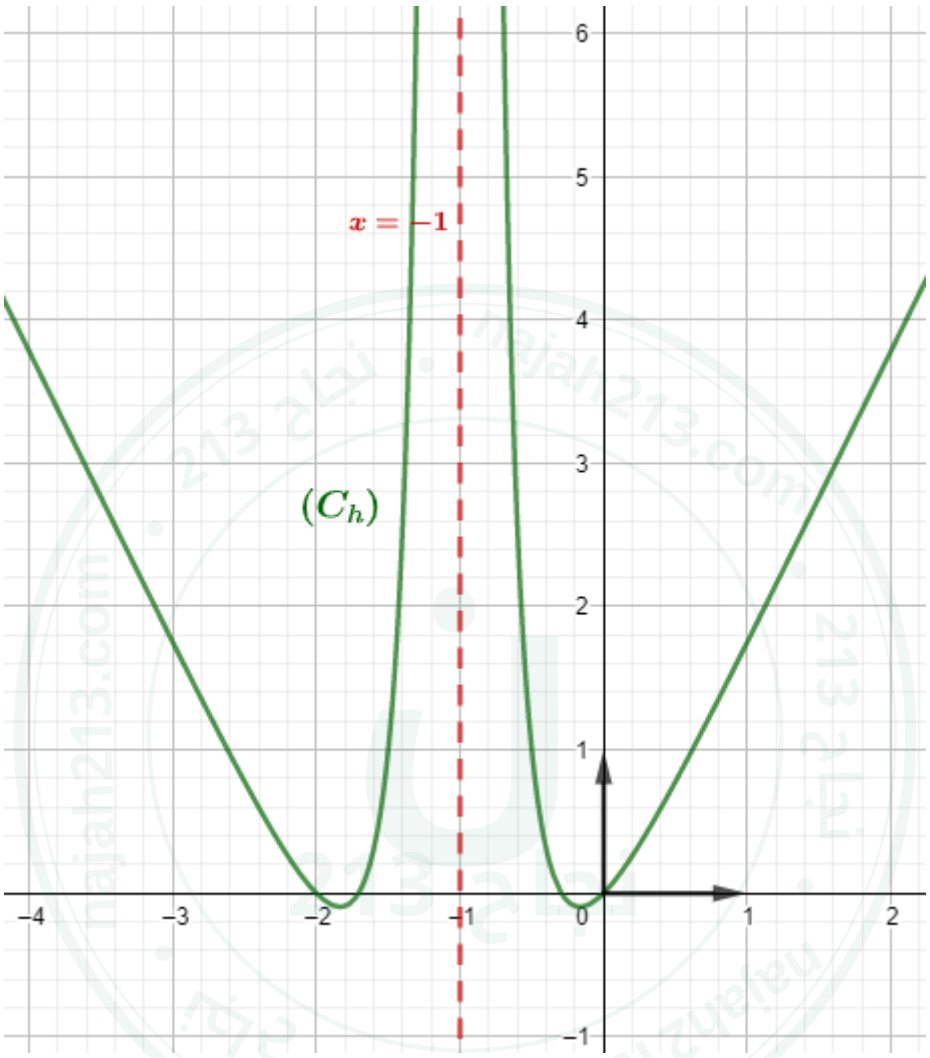
- رسم $(C_h)$:

لدينا:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x > -1 \\ f(-2-x) & ; \quad x > -1 \end{cases}$$

إذن $(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ لما $x > 1$

و $(C_h)$ متناظر بالنسبة للمستقيم $x = -1$






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

# 14 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)** تعيين $\alpha$ و $\beta$ :

لدينا: $f(0) = -1$ ، ومنه:

$$\frac{(0)^2 + \alpha(0) + \beta}{2(0) - 2} = -1 \Rightarrow \frac{\beta}{-2} = -1$$
$$\Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

ولدينا: $f(0) = -1$ تقبل قيمة حدية لـ $f$ معناه: $f'(0) = 0$

نعيّن أولا $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x + \alpha)(2x - 2) - 2(x^2 + \alpha x + \beta)}{(2x - 2)^2}$$
$$= \frac{4x^2 - 4x + 2\alpha x - 2\alpha - 2x^2 - 2\alpha x - 2\beta}{(2x - 2)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 4x - 2\alpha - 2\beta}{(2x - 2)^2}$$

ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

$$\frac{2(0)^2 - 4(0) - 2\alpha - 2\beta}{(2(0) - 2)^2} = 0 \Rightarrow -2\alpha - 2\beta = 0$$
$$\Rightarrow -2\alpha = 2\beta$$
$$\Rightarrow \alpha = -\beta$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

ومنه: $\boxed{f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}}$

**II)** نضع فيما يلي: $\alpha = 1$ و $\beta = -2$:

❶ حساب: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}\right)$
$$= \frac{1}{0^+}$$
$$= +\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}\right)$
$$= \frac{1}{0^-}$$
$$= -\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$

❷ حساب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}\right)$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= +\infty$$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right)$
$$= -\infty$$

**3**

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-2}$$
$$= \frac{(ax+b)(2x-2)+c}{2x-2}$$
$$= \frac{2ax^2-2ax+2bx-2b+c}{2x-2}$$
$$= \frac{2ax^2+(2b-2a)x-2b+c}{2x-2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b-2a = -2 \\ -2b+c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

إذن: $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2}}$

ب/ استنتاج أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ بجوار $\pm\infty$ :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{2x-2}\right]$$
$$= 0$$

ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ بجوار $\pm\infty$ معادلته : $y_{(\Delta)} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

ج/ دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{2x-2}$$

لدينا: $2x-2=0$ معناه: $x=1$ ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y_{(\Delta)}$ | $-$ | ‖ | $+$ |

ومنه:

- $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما $x \in\ ]-\infty;1[$ .
- $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ لما $x \in\ ]1;+\infty[$ .

**4**

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(2x-2) - 2(x^2-2x+2)}{(2x-2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x - 4x + 4 - 2x^2 + 4x - 4}{(2x-2)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$
$$= \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة $f$ ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(2x-2)^2 > 0$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x(x-2)$:

لدينا:

$$2x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

❺

أ/ ايجاد إحداثيي النقطة $\omega$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$:

نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم $(\Delta)$:

$$y = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

ومنه: $\omega(1;0)$

ب/ تبيين أن النقطة $\omega$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ :

- لدينا: $x \in D_f$

معناه: $x \in ]-\infty;1[ \cup ]1;+\infty[$ معناه: $x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $(-x) < -1$ أو $(-x) > -1$ معناه: $(2(1)-x) < 1$ أو $(2(1)-x) > 1$

معناه: $(2(1)-x) \in ]-\infty;1[ \cup ]1;+\infty[$ معناه: $(2(1)-x) \in D_f$

- ولدينا:

$$f(2(1)-x) + f(x) = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x) + 2}{2(2-x) - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$
$$= \frac{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2}{4 - 2x - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$
$$= 0\frac{x^2 - 2x + 2}{-(2x-2)} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$
$$= 0 = 2(0)$$

إذن النقطة $\omega$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى $(C_f)$ يشمل النقطة $\omega$

**مركز التناظر:**

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر $(C_f)$ إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

إذا وُجد مماس لـ $(C_f)$ يشمل $\omega(1;0)$ معناه يوجد $a \in \mathbb{R}-\{1\}$ يحقق:

$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$$

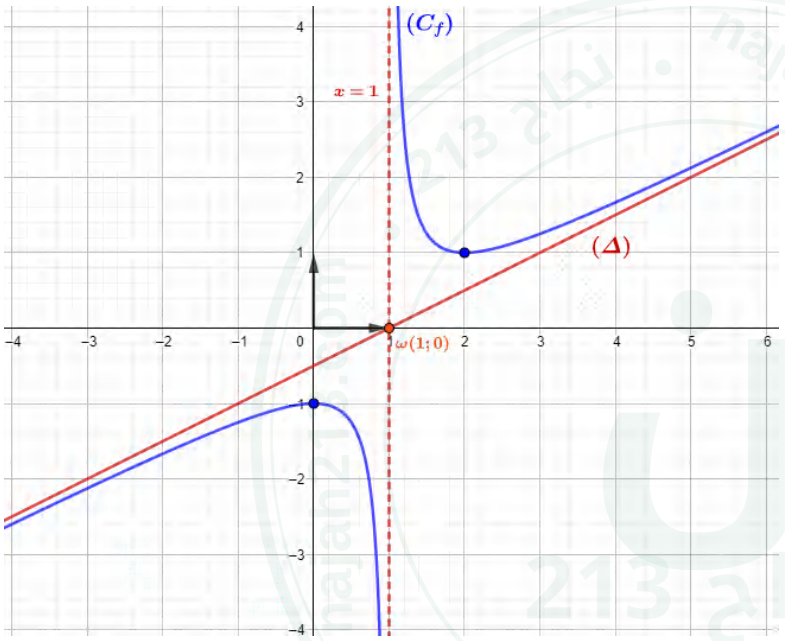
لدينا:

$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega \Rightarrow f'(a)(1-a) + f(a) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2} - \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2}a + \frac{a^2-2a+2}{2a-2} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{2a(a-2) - 2a^2(a-2) + (a^2-2a+2)(2a-2)}{(2a-2)^2} = 0$$
$$\Rightarrow 2a^2 - 4a - 2a^3 + 4a^2 + 2a^3 - 2a^2 - 4a^2 + 4a + 4a - 4 = 0$$
$$\Rightarrow 4a - 4 = 0$$
$$\Rightarrow a - 1 = 0$$
$$\Rightarrow a = 1$$

لدينا: $a \notin \mathbb{R}-\{1\}$ إذن: لا يوجد أي مماس للمنحنى $(C_f)$ يشمل النقطة $\omega$

❻ رسم كل من $(\Delta)$ و $(C_f)$ :

الرسم في الشكل المقابل.




❼ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $(E)$ هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \frac{1}{2}x + m$ ، وهي:

| | | |
|---|---|---|
| لما | $m \in ]-\infty;-1[$ | للمعادلة حل موجب |
| لما | $m = -1$ | للمعادلة حل معدوم |
| لما | $m \in \left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ | للمعادلة حل سالب |
| لما | $m = -\frac{1}{2}$ | المعادلة لا تقبل حلولا |
| لما | $m \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ | للمعادلة حل موجب |

## III)

❶ دراسة شفعية الدالة $h$:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

ومنه الدالة $h$ زوجية

❷ توضيح كيف يمكن المنحنى $(C_h)$ :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه $(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة $h$ زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

# 15 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)**

**1**

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3 - 4x^2 + 7x - 4)$
  $= \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3)$
  $= +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 - 4x^2 + 7x - 4)$
  $= \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3)$
  $= -\infty$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ وتشكيل جدول تغيراتها:

$g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

لدينا: $\Delta = 64 - 4 \times 7 \times 6 = -104$، ومنه $\Delta < 0$

إذن المعادلة $g'(x) > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**2**

أ/ تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$ :

لدينا: الدالة $g$ مستمرة ومتزايدة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(0.7) \times g(0.8) < 0$ لأن: $g(0.7) \approx -0.37$ و $g(0.8) \approx 0.06$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ حيث: $0.7 < \alpha < 0.8$ .

ب/ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**II)**

**1** حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}\right)$
  $= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2}\right)$
  $= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2}$
  $= -\infty$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}$$
$$= +\infty$$

❷

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$:

$$f(x)=\frac{x+1}{2}+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{2(x+1)(2x^2-2x+1)+2(1-3x)}{4(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$
$$=f(x)$$

ب/ استنتاج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ :

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-3x}{4x^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-3}{4x}\right]$$
$$=0$$

وأيضا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=0$$

ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ معادلته $y_{(\Delta)}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ بجوار $\pm\infty$.

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و $(\Delta)$:

$$f(x)-y_{(\Delta)}=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

لدينا: $(2x^2-2x+1>0)$

لأنّ $\Delta<0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$1-3x=0 \Rightarrow -3x=-1$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|

| $f(x)-y_{(\Delta)}$ | + | 0 | − |
|---|---|---|---|

- الوضعية:
  - $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ لما $x \in \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$
  - $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ لما $x=\frac{1}{3}$ أي في النقطة ذات الإحداثيات $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$
  - $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

❸

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}$$
$$=\frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}$$
$$=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}$$
$$=\frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}$$
$$=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

ب/ استنتاج إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$ :

لدينا:

$$f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

بما أنّ $(2x^2-2x+1)^2>0$ فالإشارة من $x\cdot g(x)$

ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | − | − | 0 | + | | + | |
| $g(x)$ | − | | − | − | 0 | + | |
| $f'(x)$ | + | + | 0 | − | 0 | + | |

- جدول تغيرات الدالة $f$:

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | $-0.1$ | ↗ | $+\infty$ |

❹ حساب $f(1)$:

$$f(1)=\frac{1-2+1}{2-2+1}=0$$

- حل المعادلة $f(x)=0$:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=0$$
$$\Rightarrow x^3-2x+1=0$$
$$\Rightarrow (x-1)(x^2+ax+b)=0$$

نبحث أولا عن $a$ و $b$:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$(x-1)(x^2+ax+b) = x^3+ax^2+bx-x^2-ax-b$$
$$= x^3+x^2(a-1)+x(b-a)-b$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a-1=0 \\ b-a=-2 \\ -b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{أو} \\ x^2+x-1=0 \end{cases}$$

لدينا: $x-1=0$ معناه: $x=1$

ولدينا: $x^2+x-1=0$ نحلها باستعمال المميز $\Delta$:

$$\Delta = 1-4(1)(-1)=5$$

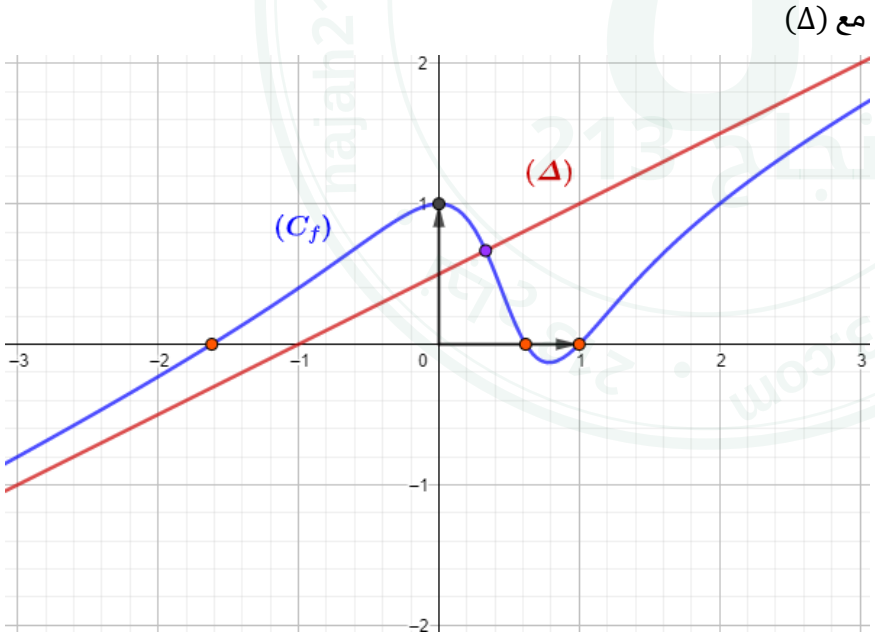
ومنه:

$$x^2+x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.62 \\ \text{أو} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.62 \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة $f(x)=0$ هي: $s=\left\{1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

❺ إنشاء المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$ :

- نعين النقطة $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ نقطة تقاطع $(C_f)$ مع $(\Delta)$
- نعين النقط ذات الفواصل $1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.
- نعين النقطة ذات الترتيبة 1 ، نقطة تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب.
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
- باستعمال جدول تغيرات الدالة $f$ نكمل رسم $(C_f)$ ، مع الاستعانة بجدول الوضعية بين $(C_f)$ و $(\Delta)$




❻

أ/ التحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$:

$$f(x)-2=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}-2$$
$$=\frac{x^3-2x+1-4x^2+4x-2}{2x^2-2x+1}$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

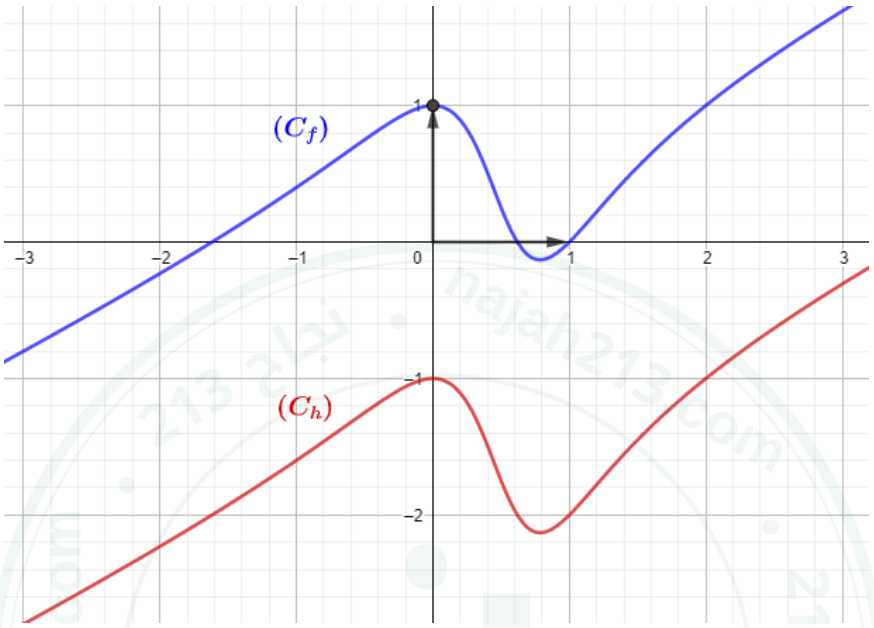
$$= \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$
$$= h(x)$$

ب/ استنتاج أن $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط:

$$h(x) = f(x) - 2$$

ومنه $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بإنسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

- إنشاء $(C_h)$ :






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# 16 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

I)

❶ حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x-2}{2x}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{2x}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$= +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$= +\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \frac{-2}{0^+}$$
$$= -\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \frac{-2}{0^-}$$
$$= +\infty$$

❷ دراسة تغيرات الدالة $f$، وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+1)(2x)-2(x^3+x-2)}{(2x)^2}$$
$$= \frac{6x^3+2x-2x^3-2x+4}{4x^2}$$
$$= \frac{4x^3+4}{4x^2}$$
$$= \frac{x^3+1}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:

نلاحظ أنّ $(-1)$ جذر لـ $(x^3+1)$ ومنه: $x^3+1 = (x+1)(ax^2+bx+c)$

باستعمال طريقة هورنر او المطابقة أو القسمة الاقليدية نجد:

| | 1 | 0 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 0 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| | 1 | $-1$ | 1 | 0 |

إذن: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

نستعمل المميز $\Delta$ لحل المعادلة $(x^2-x+1)$:

لدينا: $\Delta = -3 < 0$

ومنه: $f'(x) = 0$ معناه $x = -1$، إذن:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $2$ | $+\infty$ | $-\infty$ $+\infty$ |

❸

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{2x}$:

$$f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{2x}$$
$$= \frac{(ax^2 + b)(2x) + c}{2x}$$
$$= \frac{2ax^3 + 2bx + c}{2x}$$

بالمطابق نجد: $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -2 \end{cases}$ إذن: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$

ب/ استنتاج أنّ $(C_f)$ يقبل منحنى $(C)$ مقارب بجوار $\pm\infty$ :

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]$$
$$= 0$$

إذن المنحنى $(C)$ ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$

❹

أ/ تبيين أن $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة $A$ :

لدينا:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 + x - 2}{2x} = 0$$
$$\Rightarrow x^3 + x - 2 = 0$$

نلاحظ أنّ $(1)$ جذر لـ $(x^3 + x - 2)$ ومنه: $x^3 + x - 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

باستعمال طريقة هورنر او المطابقة أو القسمة الاقليدية نجد:

| | $1$ | $0$ | $1$ | $-2$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $0$ | $1$ | $1$ | $2$ |
| | $1$ | $1$ | $2$ | $0$ |

إذن: $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$

نستعمل المميز $\Delta$ لحل المعادلة $(x^2 + x + 2)$:

لدينا: $\Delta = -7 < 0$

ومنه: $f(x) = 0$ معناه $x = 1$، إذن: $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $A(1; 0)$

ب/ كتابة معادلة للمماس $(T)$ عند النقطة $A$:

$$y_{(T)} = f'(1)(x - 1) + f(1)$$
$$= 2(x - 1)$$
$$= 2x - 2$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ج/ تبيين أنّ المماس $(T)$ يقطع المنحنى $(C_f)$ في نقطة أخرى $B$ :

نعين نقط تقاطع $(T)$ مع $(C_f)$ بحل المعادلة $f(x) = y_{(T)}$

$$f(x) = y_{(T)} \Rightarrow \frac{x^3 + x - 2}{2x} = 2x - 2$$
$$\Rightarrow x^3 + x - 2 = 4x^2 - 4x$$
$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

وضعنا $(1)$ جذر للمعادلة $f(x) = y_{(T)}$ لأننا نعلم سابقا أنّ النقطة $A$ ذات الفاصلة 1 يكون عندها المماس $(T)$.

ومنه باستعمال جدول هورنر نجد:

| | 1 | −4 | 5 | −2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | −3 | 2 |
| | 1 | −3 | 2 | 0 |

إذن: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$

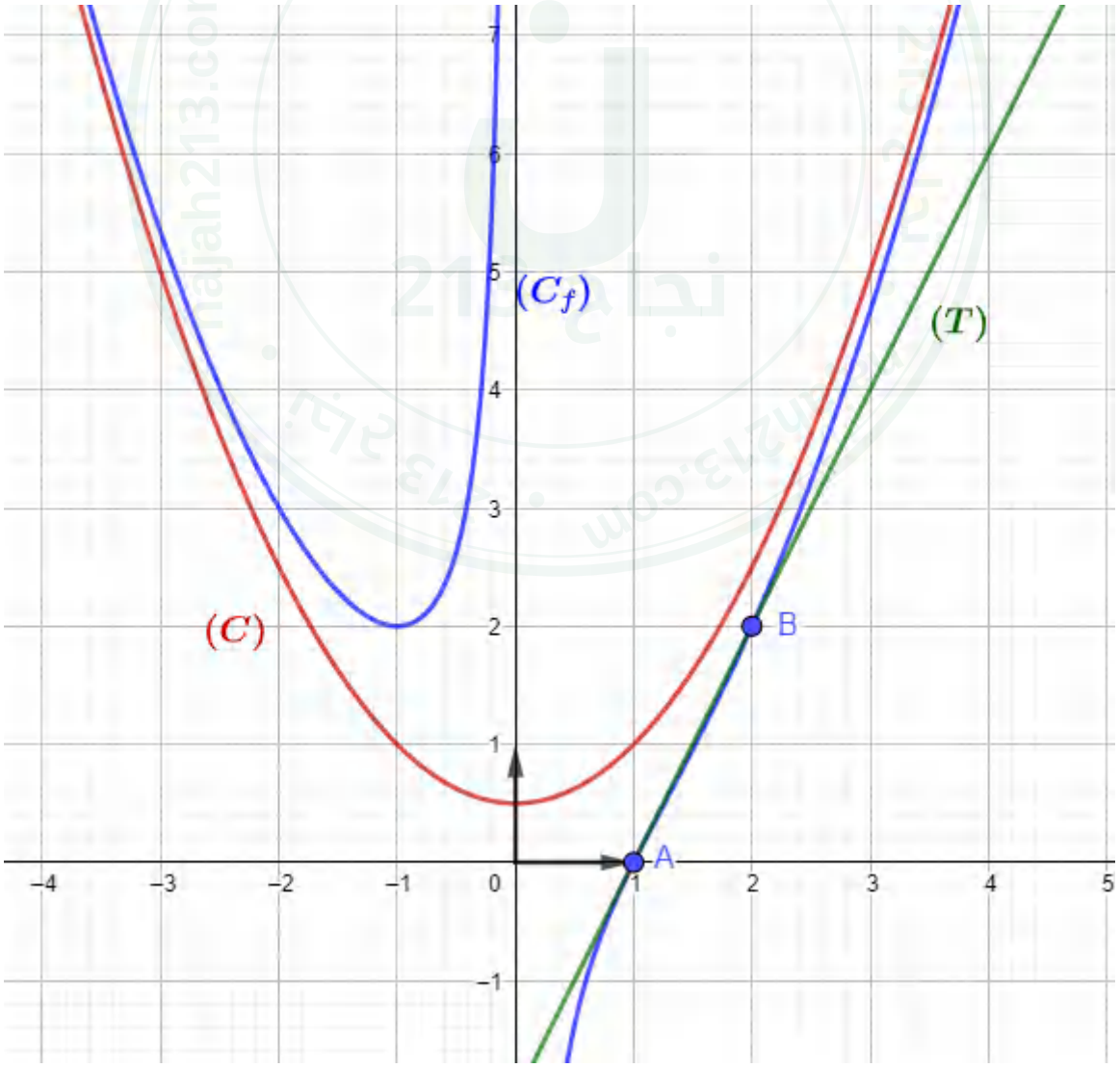
نستعمل المميز $\Delta$ لحل المعادلة $(x^2 - 3x + 2)$:

لدينا: $\Delta = 1$ ومنه: $x_1 = 2$ و $x_2 = 1$

إذن: $f(x) = y_{(T)}$ معناه $x = 1$ أو $x = 2$

نستنتج أنّ المنحنى $(C_f)$ يقطع $(T)$ في نقطتين $A(1;0)$ و $B\big(2;f(2)\big)$ أي $B(2;2)$

❺ التمثيل البياني:






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

**6** المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$

وبما أن ميل المستقيمات معدوم فالمناقشة أفقية، والحلول هي:

لما $m < 2$ للمعادلة حل موجب

لما $m = 2$ المعادلة تقبل حل موجب وحل مضاعف سالب

لما $m > 2$ المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب

**(II**

**1** دراسة شفعية الدالة $h$:

$$h(-x) = \frac{-(-x)^2|-x| - |-x| - 2}{2(-x)}$$
$$= -\frac{-(x)^2|x| - |x| - 2}{2(x)}$$
$$= -h(x)$$

إذن الدالة $h$ فردية

**2** إنشاء $(C_f)$ مع شرح كيفية إنشائه:

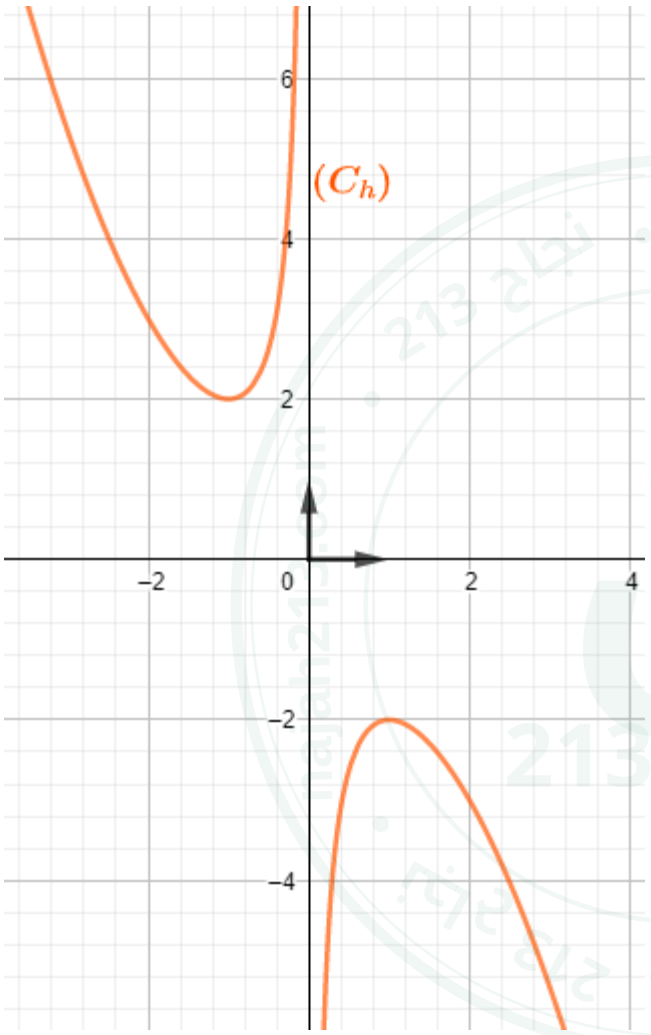
$$h(x) = \frac{-x^2|x| - |x| - 2}{2x}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{-x^2(x) - (x) - 2}{2x} & ; \ x > 0 \\ \dfrac{-x^2(-x) - (-x) - 2}{2x} & ; \ x < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{-x^3 - x - 2}{2x} & ; \ x > 0 \\ \dfrac{x^3 + x - 2}{2x} & ; \ x < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -f(x) & ; \ x > 0 \\ \dfrac{x^3 + x - 2}{2x} & ; \ x < 0 \end{cases}$$

لما $x > 0$ لدينا: $h(x) = -f(x)$

أي: لما $x < 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$

ومنه $(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ في المجال $]-\infty; 0[$

وبما أنّ الدالة $h$ فردية فهي متناظرة بالنسبة للمبدأ.






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# 17 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)**

**1**

أ/ حساب نهايات $f$ عند الحدود المفتوحة لـ $I$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+\underbrace{\frac{4}{x+1}}_{0}\right)$
$= +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{<\\x\to-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{<\\x\to-1}}\left(-x+\underbrace{\frac{4}{x+1}}_{0}\right)$
$= -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)$
$= +\infty$
- $f(0) = 4$

ب/ جدول تغيرات الدالة بقراءة بيانية:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | ‖ | ↘ | $4$ |
| | | | $-\infty$ | | $+\infty$ |

**2**

أ/ حساب نهاية $g$ عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\underbrace{\frac{4}{x+1}}_{0}\right)$$
$$= +\infty$$

ب/ التحقق من أنّ $(C_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ عند $+\infty$ :

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}-x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right)$$
$$= 0$$

ومنه $(C_g)$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$

ج/ دراسة تغيرات الدالة $g$:

$$g'(x) = 1-\frac{4}{(x+1)^2}$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - 4}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x^2 + 2x - 2)$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

لدينا: $\Delta = 4 + 12 = 16$

ومنه:

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \\ \text{أو} \\ x = \dfrac{-2-4}{2} = -3 \ (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

ومنه:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $4$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

**(II**

**1**

أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right)$ :

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{|h| + \frac{4}{h+1} - 4}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{h^2 + h + 4 - 4h - 4}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{h^2 - 3h}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{h-3}{h}\right)$$
$$= -3$$

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{|h| + \frac{4}{h+1} - 4}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{-h^2 - h + 4 - 4h - 4}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{-h^2 - 5h}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-h - 5)$$
$$= -5$$

- نستنتج أن الدالة $k$ لا تقبل الاشتقاق عند $0$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ب/ التفسير الهندسي:

المنحنى $(C_k)$ يقبل نصفي مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 معاملا توجيههما هما $-5$ و $-3$

❷ كتابة معادلتي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند الناقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$:

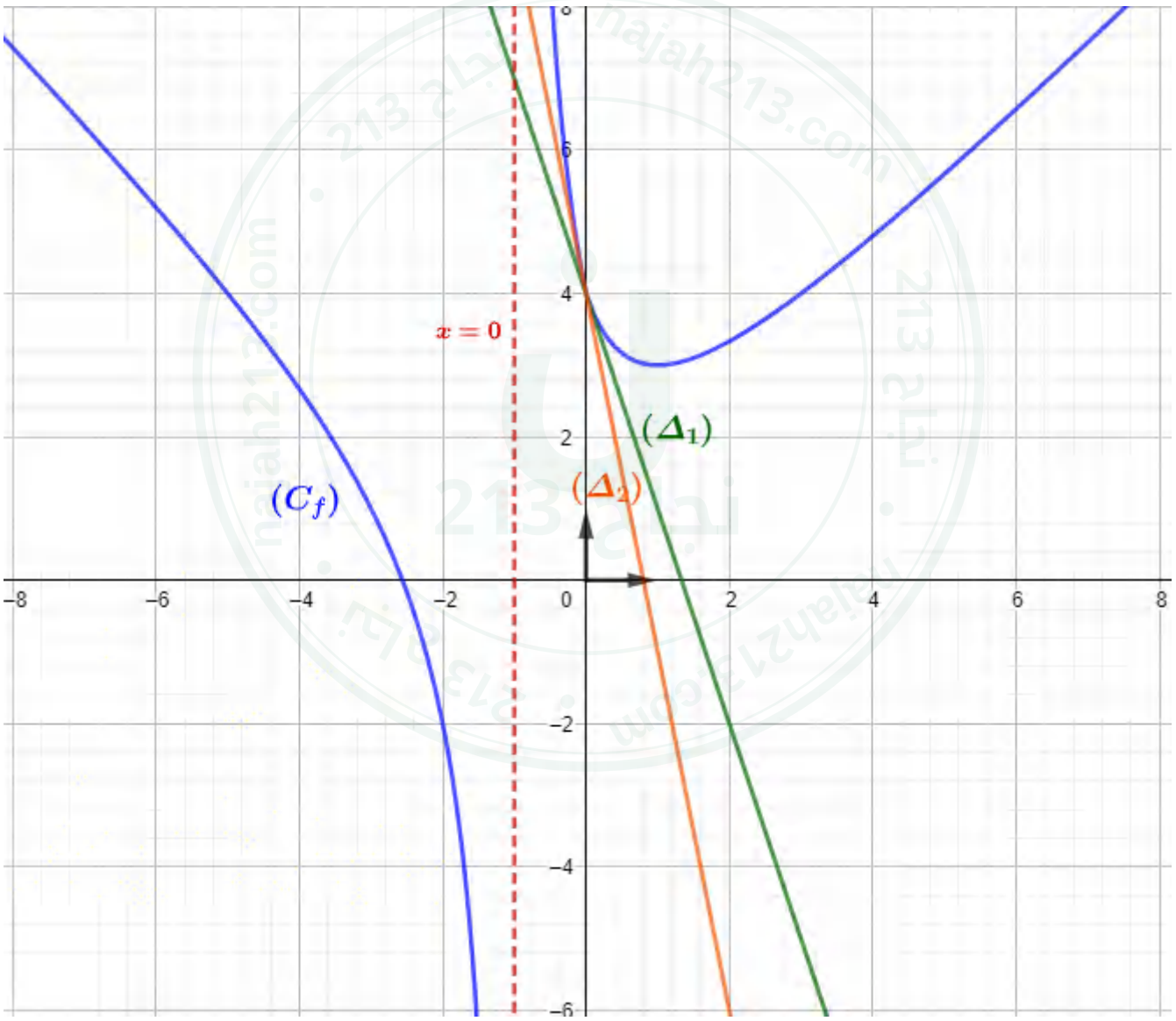
لدينا:

$$y_{(\Delta_1)} = -3x + k(0)$$
$$= -3x + 4$$

ولدينا:

$$y_{(\Delta_2)} = -5x + k(0)$$
$$= -5x + 4$$

❸ رسم $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ و $(C_k)$ :






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# حل المسـألة رقم: 18

مشاهـــدة المسألة

❶

أ/ تشكيل جدول تغيرات الدالة $g$ :

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-2$ ↗ | $+\infty$ |

- تحديد $g(0)$:

$$g(0) = -1$$

- إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

ب/ تعليل وجود عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$:

لدينا الدالة $g$ مستمرة ومتزايدة على $]-1;+\infty[$

ولدينا: $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

ج/ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$ :

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

❷

أ/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}$$
$$= g(x)$$

ب/ تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$ :

$$\lim_{x\to+\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right) = f'(\alpha)$$
$$= \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}$$
$$= 0$$

- تفسير النتيجة هندسيا:

$(\Gamma)$ يقبل مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة $\alpha$

ج/ حساب: $\lim\limits_{x\to-1^{>}} f(x)$ :



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$\lim_{x\to -1^{>}} f(x) = \lim_{x\to -1^{>}} \left(\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}\right)$$
$$= \frac{-1+3-3+2}{0^+}$$
$$= +\infty$$

ومنه $(\Gamma)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=-1$

- حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+3x^2+3x+2-(x^2+2x+1)(x+1)}{(x+1)^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+3x^2+3x+2-x^3-2x^2-x-x^2-2x-1}{(x+1)^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]$$
$$= +\infty$$

ومنه $(\Gamma)$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $x=x+1$

د/ تشكيل جدول تغيرات الدالة $f$:

| $x$ | $-1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ $+\infty$ |

❸ نأخذ $\alpha \approx 0.26$

أ/ تعيين مدور $f(\alpha)$ إلى $10^{-2}$:

$$f(\alpha) = \frac{(0.26)^3+3(0.26)^2+3(0.26)+2}{(0.26+1)^2}$$
$$= 1.88988158226$$
$$\approx 1.89$$

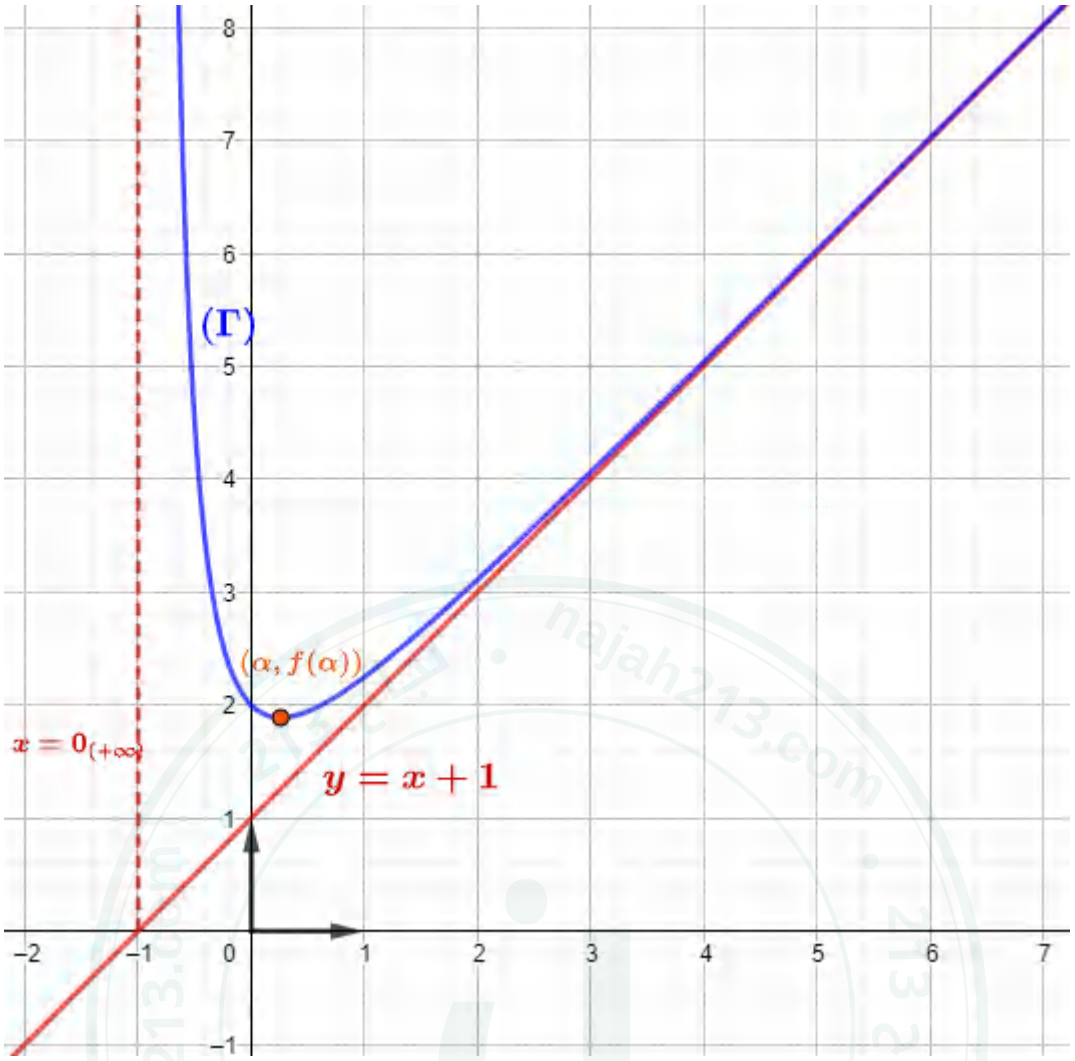
ب/ رسم المنحنى $(\Gamma)$:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=-1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y=x+1$
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(\alpha; f(\alpha))$
- باستعمال جدول تغيرات الدالة $f$ نكمل رسم $(\Gamma)$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## 19 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)**

❶ دراسة تغيرات الدالة $g$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 + 6x + 3 \\ &= 3(x^2 + 2x + 1) \\ &= 3(x+1)^2 \end{aligned}$$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه الدالة $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

❷ حساب $g(-2)$:

$$\begin{aligned} g(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا $(-2)$ جذر لـ $g(x)$ ومنه:

$$\begin{aligned} g(x) &= \big(x - (-2)\big)(x^2 + ax + b) \\ &= (x+2)(x^2 + ax + b) \\ &= x^3 + ax^2 + bx + 2x^2 + 2ax + 2b \\ &= x^3 + (a+2) + (b+2a)x + 2b \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \\ b + 2a = 3 \\ 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

إذن:

$$g(x) = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

لحل المعادلة $(x^2 + x + 1 = 0)$ نستعمل المميز $\Delta$ :

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

ومنه $(x^2 + x + 1) > 0$ في $\mathbb{R}$

اذن:

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

❸ استنتاج إشارة $g(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**II)** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}$$

❶ تبيين أنّ: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$:

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$f'(x) = \frac{(6x^2+14x+8)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^3+7x^2+8x+2)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{(6x^2+14x+8)(x+1) - 2(2x^3+7x^2+8x+2)}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{6x^3+14x^2+8x+6x^2+14x+8-4x^3-14x^2-16x-4}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{2x^3+6x^2+6x+4}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

❷ دراسة تغيرات الدالة $f$، وتشكيل جدول تغيراتها:

- تعيين النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$$
$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$$
$$\bullet \lim_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\ <}}\left(\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}\right)$$
$$= \frac{-1}{(0^-)^2} = -\infty$$
$$\bullet \lim_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = \frac{-1}{(0^+)^2} = -\infty$$

- دراسة $f'(x)$:

لدينا:

$$(x+1)^3 = 0 \Rightarrow (x+1)^2(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow x+1 = 0$$
$$\Rightarrow x = -1$$

ومنه إشارة $f'(x)$ كالآتي:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $(x+1)^3$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ |

- جدول تغيرات الدالة $f$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | $-\infty$ | ↗ $+\infty$ |

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

❸ تبيين أنّ: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1)+c}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+c}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b)+b+c}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=7 \\ a+2b=8 \\ b+c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

❹

أ/ تبيين أنّ المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ يقبل مستقيمين مقاربين:

لدينا: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$

ومنه: $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$

ولدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x+3)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[2x+3-\frac{1}{(x+1)^2}-(2x+3)\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-1}{(x+1)^2}\right]$$
$$= 0$$

ومنه: $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ بجوار $\pm\infty$ معادلته $y_{(\Delta)} = 2x + 3$

ب/ دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

لدينا $(x+1)^2 > 0$ ومنه $\left(f(x) - y_{(\Delta)}\right) < 0$

إذن $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما $x \in D_f$.

❺ تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ حيث: $\alpha \in\ ]-0.35;-0.34[$:

لدينا الدالة $f$ مستمرة ومتزايدة على المجال $]-1;+\infty[$

ولدينا: $f(-0.35)\times f(-0.34) < 0$ لأنّ: $f(-0.35) \approx -0.07$ و $f(-0.34) \approx 0.02$

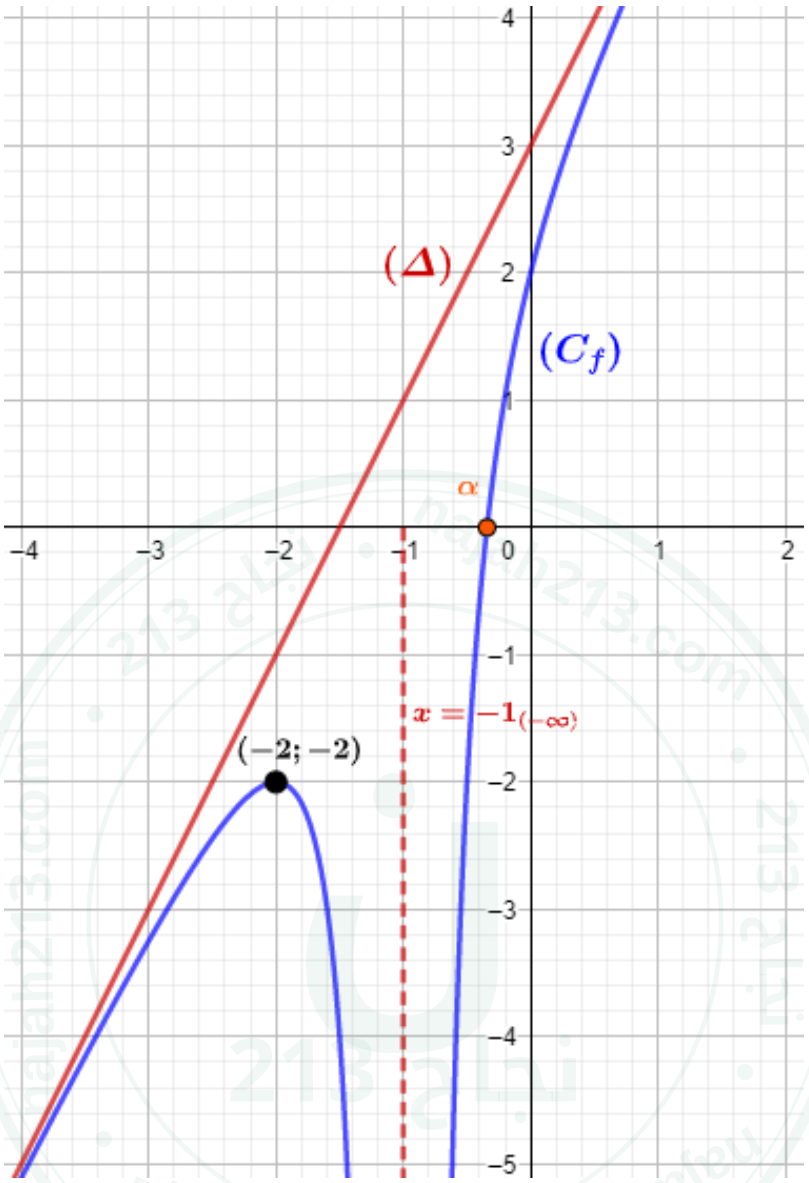
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ حيث: $-0.35 < \alpha < -0.34$

❻ رسم المنحنى $(C_f)$ :

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$ بجوار $-\infty$.
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$ ذو المعادلة $y_{(\Delta)} = 2x + 3$.
- نعين النقطة $\alpha$ نقطة تقاطع $(C_f)$ مع محور الفوصل.

- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(-2;-2)$ لتسهيل الرسم
- باستعمال جدول تغيرات الدالة $f$ نرسم $(C_f)$ . مع الاستعانة بوضعية $(C_f)$ بالنسبة $(\Delta)$.




❼ المناقشة البيانية

حلول المعادلة $(E)$ هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيمات المائلة ذات المعادلة $y_m = 2x + m$، وهي:

| | | |
|---|---|---|
| لما | $m < -2$ | المعادلة تقبل ثلاث حلول سالبة |
| لما | $m = -2$ | المعادلة تقبل حل سالب وجذر مضاعف سالب |
| لما | $-2 < m < 2$ | المعادلة تقبل حل سالب |
| لما | $m = 2$ | المعادلة تقبل حل معدوم |
| لما | $m > 2$ | المعادلة تقبل حل موجب |

**III)**

❶ تبيين أنّ الدالة $h$ زوجية:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$h(-x) = h(x)$ ومنه الدالة $h$ زوجية.

❷ رسم المنحنى $(C_h)$ :

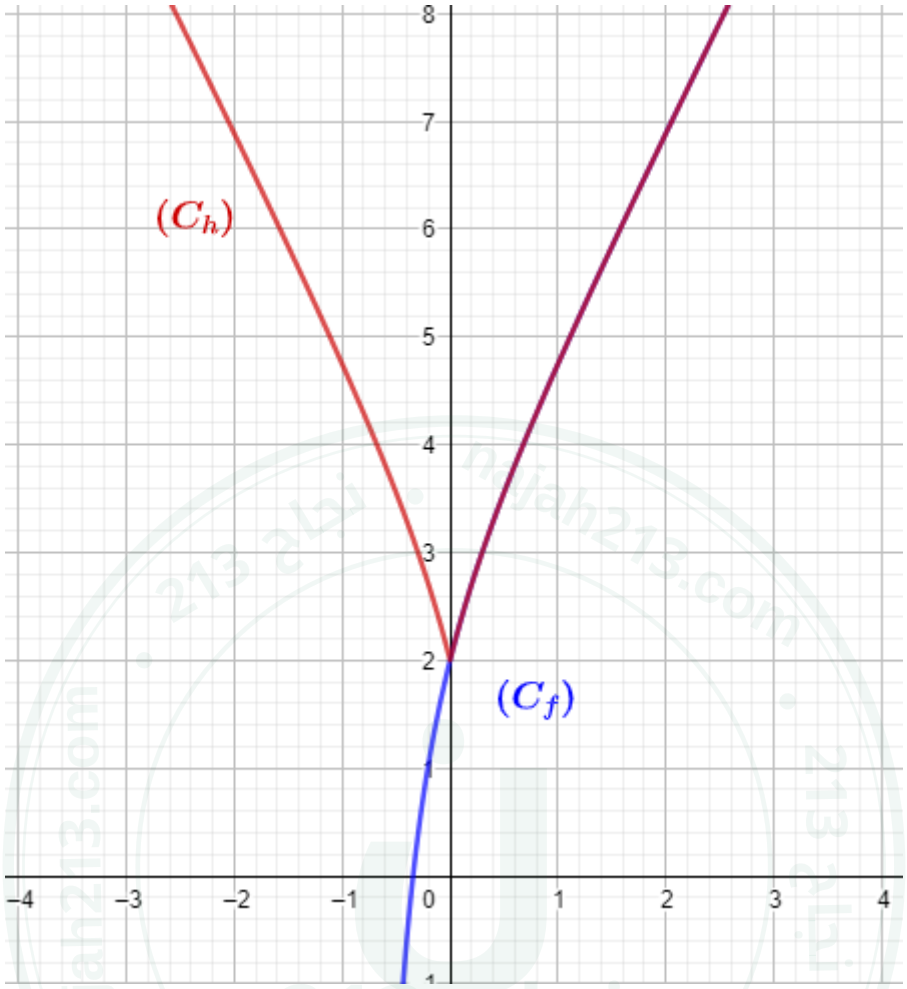


فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لما $x \geq 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$

ومنه $(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ في المجال $x \in \mathbb{R}_+$

وبما أنّ الدالة $h$ زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب.






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# 20 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)**

**❶ دراسة تغيرات الدالة $g$ على $\mathbb{R}$:**

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3+3x+16)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (x^3)$$
$$= +\infty$$
$$\bullet \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3+3x+16)$$
$$= \lim_{x-\infty} (x^3)$$
$$= -\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2+3$$
$$= 3(x^2+1)$$

لدينا: $(x^2+1) > 0$ ومنه $g'(x)$ موجبة تماما على $\mathbb{R}$

- جدول تغيرات الدالة $g$:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**❷ تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $-2 < \alpha < -2.5$:**

لدينا الدالة $g$ مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(-2)\times g(-2.5) < 0$ لأن: $g(-2) \approx 2$ و $g(-2.5) \approx -7.13$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $-2 < \alpha < -2.5$

**❸ استنتاج إشارة $g(x)$:**

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**II)**

**❶ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-8)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{3x^4+3x^2-2x^4+16x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x(x^3+3x+16)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x\cdot g(x)}{(x^2+1)^2}$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

❷ دراسة تغيرات الدالة $f$:

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-8}{x^2+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(x)$$
$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-8}{x^2+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)$$
$$= -\infty$$

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

لدينا: $(x^2+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x$ في إشارة $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | |
| $x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |

- جدول تغيرات الدالة $f$:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-8$ | ↗ | $+\infty$ |

❸ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha^3 = -(3\alpha+16)$$

ولدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha\alpha^2 + 3\alpha + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{-(3\alpha+16)}{\alpha}$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3-8}{\alpha^2+1}$$
$$= \frac{(-3\alpha-16-8)}{\left(\frac{-(3\alpha+16)}{\alpha}+1\right)}$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= \frac{(-3\alpha - 24)}{\left(\frac{-3\alpha - 16 + \alpha}{\alpha}\right)}$$
$$= \frac{(-3\alpha - 24)}{\left(\frac{-2\alpha - 16}{\alpha}\right)}$$
$$= \frac{3\alpha(\alpha + 8)}{2(\alpha + 8)}$$
$$= \frac{3}{2}\alpha$$

- تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $-2.5 < \alpha < -2$

ومنه: $-7.5 < 3\alpha < -6$

ومنه: $-3.75 < \frac{3}{2}\alpha < -3$

إذن: $-3.75 < f(\alpha) < -3$

**4**

أ/ تبيين أن $(\Delta)$ المستقيم المنصف الأول مقارب مائل لـ $(C_f)$ :

معادلة المستقيم المنصف الأول هي : $y = x$

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - y_{(\Delta)}] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3 - 8 - x^3 - x}{x^2 + 1}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-8 - x}{x^2 + 1}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{x}{x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم $(\Delta)$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$ :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} - x$$
$$= \frac{-8 - x}{x^2 + 1}$$
$$= \frac{-(x + 8)}{x^2 + 1}$$

لدينا: $(x^2 + 1) > 0$ ومنه:

$$-(x + 8) = 0 \Rightarrow x = -8$$

ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | | $-8$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - y_{(\Delta)}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

- الوضعية:

- $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ لما $x \in ]-\infty; -8[$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

- $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ لما $x = -8$ أي في النقطة ذات الفاصلة $(-8;-8)$.
- $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما $x \in ]-8;+\infty[$

❺

أ/ ايجاد فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل:

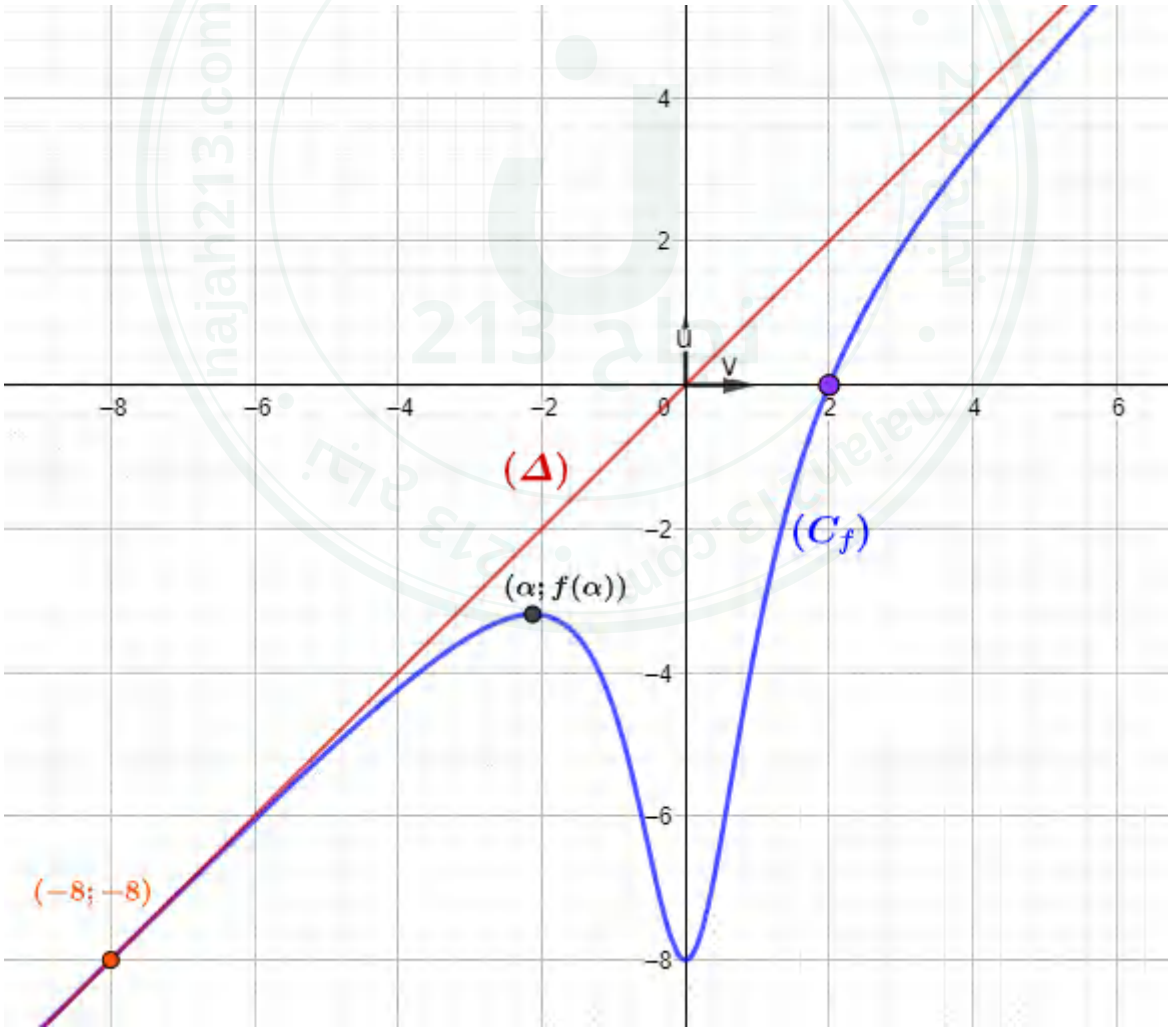
حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفوصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} = 0$$
$$\Rightarrow x^3 - 8 = 0$$
$$\Rightarrow x^3 = 8$$
$$\Rightarrow x = 2$$

إذن: $(C_f) \cap (xx') = \{2\}$

ب/ التمثيل البياني:

- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$ ذو المعادلة $y_{(\Delta)} = x$.
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(-8;-8)$ نقطة تقاطع $(C_f)$ مع $(\Delta)$.
- نعين النقطة ذات الفاصلة $-2$ نقطة تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل
- باستعمال جدول تغيرات الدالة $f$ نرسم $(C_f)$ . مع الاستعانة بوضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.




ج/ المناقشة البيانية:

$$x^3 - mx^2 - 8 - m = 0 \Rightarrow x^3 - 8 - m(x^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 8 = m(x^2 + 1)$$
$$\Rightarrow \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} = m$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيمات الأفقية ذات المعادلة $y_m = m$، وهي:

| | | |
|---|---|---|
| لما | $m < -8$ | المعادلة تقبل حل سالب |
| لما | $m = -8$ | المعادلة تقبل حلين: حل مضاعف معدوم $x = -8$ ، وحل سالب |
| لما | $-8 < m < -2$ | المعادلة تقبل حل موجب وحلين سالبين |
| لما | $m = -2$ | المعادلة تقبل حلين: حل موجب وحل مضاعف سالب |
| لما | $m > -2$ | المعادلة تقبل حل وحيد موجب |

**III)** نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1}$$

❶ دراسة شفعية الدالة $h$:

$$h(-x) = \frac{|-x|(-x)^2 - 8}{(-x)^2 + 1}$$
$$= \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1}$$
$$= h(x)$$

ومنه الدالة $h$ زوجية

❷ كتابة $h$ دون استعمال رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{xx^2 - 8}{x^2 + 1} & ; \quad x \geq 0 \\ \dfrac{-x(-x)^2 - 8}{(-x)^2 + 1} & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

❸ استنتاج رسم المنحنى $(C_h)$ الممثل للدالة $h$ انطلاقا من المنحنى $(C_f)$ :

لدينا:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه $(C_h)$ يطابق $(C_f)$ لما $x > 0$

وبما أن الدالة $h$ زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# 21 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**I)**

**1** دراسة تغيرات الدالة $g$:

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2 + 3x - 5)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (x^3)$$
$$= +\infty$$
$$\bullet \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3)$$
$$= -\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$= 3(x^2 - 2x + 1)$$
$$= 3(x-1)^2$$

لدينا: $(x-1)^2 > 0$ ومنه: $g'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة $g$:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**2** تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $\alpha \in ]2;3[$:

لدينا: • الدالة $g$ مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

• $g(2) \times g(3) < 0$ لأن: $g(3) \approx 4$ و $g(2) \approx -3$

**3** تعيين قيمة العدد الطبيعي $n$ بحيث: $\frac{n}{10} < \alpha < \frac{n+1}{10}$:

نقسم المجال $]2;3[$ على 10 ونحسب صور الدالة:

| $x$ | ... | 2 | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.9 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ... | $-3$ | $-2.6$ | $-2.2$ | $-2.8$ | $-1.2$ | $-1.6$ | 0.09 | 0.9 | 1.8 | 2.8 | 4 | ... |
| $n$ | ... | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | ... |

من الجدول نجد أنّ $n = 25$

ومنه: $\frac{25}{10} < \alpha < \frac{25+1}{10}$

إذن: $2.5 < \alpha < 2.6$

**4** استنتاج إشارة $g(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

**II)**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

❶ حساب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(x)$$
$$= +\infty$$
$$\bullet \lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \frac{2}{(0^+)^2} = +\infty$$
$$\bullet \lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \frac{2}{(0^-)^2} = +\infty$$
$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$$

❷ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ نجد $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-6x+3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3-3x^2+3x+1)}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{(3x^2-6x+3)(x-1) - 2(x^3-3x^2+3x+1)}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{3x^3-6x^2+3x-3x^2+6x-3-2x^3+6x^2-6x-2}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{x^3-3x^2+3x-5}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

❸ دراسة تغيرات الدالة $f$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{g(x)}{(x-1)(x-1)^2}$$

لدينا: $(x-1)^2$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ في $(x-1)$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

- جدول تغيرات الدالة $f$:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

❹ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha^3 = 3\alpha^2 - 3\alpha + 5$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2}$$
$$= \frac{3\alpha^2 - 3\alpha + 5 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2}$$
$$= \frac{6}{(\alpha - 1)^2}$$

- تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $2.5 < \alpha < 2.6$

ومنه: $1.5 < \alpha - 1 < 1.6$

ومنه: $(1.5)^2 < (\alpha - 1)^2 < (1.6)^2$

ومنه: $\frac{1}{(1.6)^2} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{(1.6)^2}$

ومنه: $\frac{6}{(1.6)^2} < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < \frac{6}{(1.6)^2}$

ومنه: $2.34 < f(\alpha) < 2.67$

**5**

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية $a$، $b$، $c$ :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + c}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x^2 - 2x + 1) + c}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b + c}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)x + b + c}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -3 \\ a - 2b = 3 \\ b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$$

ب/ تبيين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

ومنه: $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$

ولدينا:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2} - (x-1)\right]$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{2}{(x-1)^2}\right]$$
$$= 0$$

ومنه: ومنه: $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ بجوار $\pm\infty$ معادلته $y_{(\Delta)} = x - 1$

ج/ دراسة الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$:

لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{2}{(x-1)^2}$$

بما أن: $(x-1)^2 > 0$ ، فإنّ: $\left(f(x) - y_{(\Delta)}\right) > 0$

ومنه: $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ على $D_f$.

❻ تعيين معادلة المماس $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$y_{(T)} = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$= \frac{g(0)}{(-1)^3}x + f(0)$$
$$= 5x + 1$$

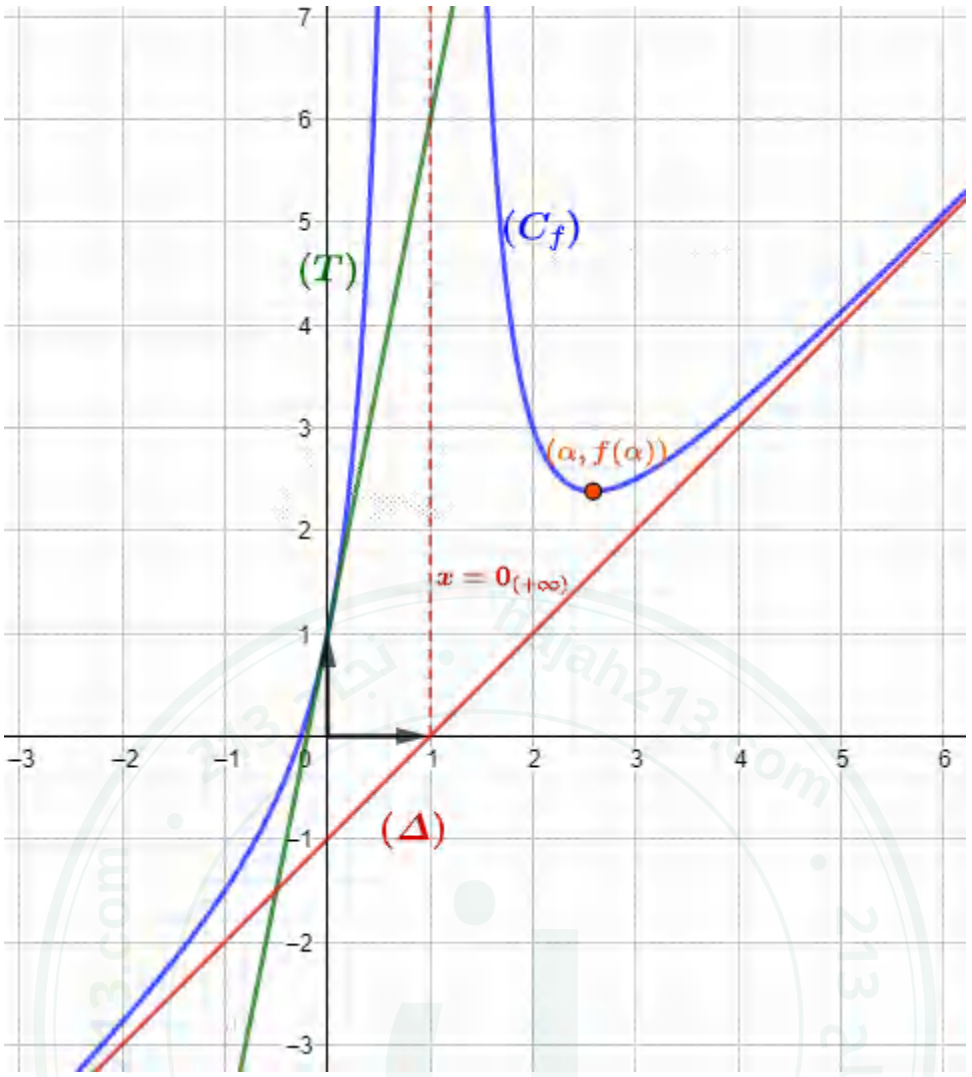
❼ التمثيل البياني:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$.
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$ ذو المعادلة $y_{(\Delta)} = x - 1$.
- نرسم المماس $(T)$ ذو المعادلة $y_{(T)} = 5x + 1$.
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $\left(\alpha; f(\alpha)\right)$ .
- باستعمال جدول تغيرات الدالة $f$ نرسم $(C_f)$ . مع الاستعانة بوضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com




**8** المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x^3 - (3+m)x^2 + (3+2m)x + 1 - m = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - mx^2 + 3x + 2mx + 1 + m = 0$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = mx^2 - 2mx + m$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = m(x^2 - 2x + 1)$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = m(x-1)^2$$
$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} = m$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيمات الأفقية ذات المعادلة: $y_m = m$

وهي:

| | | |
|---|---|---|
| لما | $m < 1$ | المعادلة تقبل حل سالب |
| لما | $m = 1$ | المعادلة تقبل حل معدوم |
| لما | $1 < m < f(\alpha)$ | المعادلة تقبل حل موجب |
| لما | $m = f(\alpha)$ | المعادلة تقبل حلين أحدهما مضاعف موجب والآخر موجب |
| لما | $m > f(\alpha)$ | المعادلة تقبل حلين موجبين |

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# 22 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

❶ كتابة عبارة الدالة $f$ دون كتابة رمز القيمة المطلقة:

$$f(x) = |x+2| + \frac{1}{x+1}$$

$$= \begin{cases} x+2+\dfrac{1}{x+1} & ; \quad x \in [-2;-1[\ \cup\ ]-1;+\infty[ \\ -x-2+\dfrac{1}{x+1} & ; \quad x \in ]-\infty;-2] \end{cases}$$

❷ دراسة قابلية الاشتقاق للدالة $f$ عند $(-2)$:

لدينا: $f(-2) = -1$

ولدينا:

$$\lim_{\substack{x\to -2 \\ <}} \left(\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\right) = \lim_{\substack{x\to -2 \\ <}} \left(\frac{-x-2+\frac{1}{x+1}-(-1)}{x+2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2 \\ <}} \left(\frac{-x-1+\frac{1}{x+1}}{x+2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2 \\ <}} \left(\frac{-x^2-x-x-1+1}{(x+2)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2 \\ <}} \left(\frac{-x^2-2x}{(x+2)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2 \\ <}} \left(\frac{-x(x+2)}{(x+2)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2 \\ <}} \left(\frac{-x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{2}{-1}$$

$$= -2$$

لدينا: $(-2) \in \mathbb{R}$ ومنه الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $-2$ من اليسار

ولدينا:

$$\lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \left(\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-1)}\right) = \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \left(\frac{x+2+\frac{1}{x+1}-(-1)}{x+2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \left(\frac{x+3+\frac{1}{x+1}+1}{x+2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \left(\frac{x^2+x+3x+3+1}{(x+2)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \left(\frac{x^2+4x+4}{(x+2)(x+1)}\right)$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= \lim_{x \to -2} \left( \frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x+1)} \right)$$
$$= \lim_{x \to -2} \left( \frac{x+2}{x+1} \right)$$
$$= \frac{0}{-1}$$
$$= 0$$

لدينا: $0 \in \mathbb{R}$ ومنه الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $-2$ من اليمين

وبما أنّ:

$$\lim_{x \to -2} \left( \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-1)} \right) \neq \lim_{x \to -2} \left( \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-1)} \right)$$

ومنه الدالة $f$ لا تقبل الاشتقاق عند $-2$

- التفسير الهندسي للنتيجة:

المنحنى $(C_f)$ يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة $-2$ معاملي توجيههما $0$ و $-2$

❸

أ/ حساب $\lim_{x \to -1} f(x)$ و $\lim_{x \to -1} f(x)$ :

- $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \left( x + 2 + \frac{1}{x+1} \right)$
$= 1 + \frac{1}{0^+}$
$= +\infty$
- $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \left( x + 2 + \frac{1}{x+1} \right)$
$= 1 + \frac{1}{0^-}$
$= -\infty$

التفسير الهندسي:

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = -1$

ب/ حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ :

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left( x + 2 + \frac{1}{x+1} \right)$
$= +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left( -x - 2 + \frac{1}{x+1} \right)$
$= -(-\infty)$
$= +\infty$

❹ دراسة تغيرات الدالة $f$:

- دراسة $f'(x)$:

• لما: $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; -2[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{(x+1)^2}$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ و $(x+2) \geq 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x$.

إذن: $f'(x) > 0$ لما: $x \in ]0; +\infty[$

$f'(x) < 0$ لما: $x \in [-2; -1[ \cup ]-1; 0[$

• لما: $x \in ]-\infty; -2[$ :

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-x^2 - 2x - 2 - 1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-(x^2 + 2x + 3)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة البسط عكس إشارة $(x^2 + 2x + 3)$:

لدينا: $\Delta = 4 - 4(1)(3) = -8 < 0$

ومنه: $(x^2 + 2x + 3) > 0$

إذن: $f'(x) < 0$ لما: $x \in ]-\infty; -2[$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة $f$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | ‖ $-\infty$ | | | | |

❺

أ/ برهان أن $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$:

- لما: $x \in [-2; -1[ \cup ]-1; +\infty[$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \to +\infty} \left[x + 2 + \frac{1}{x+1} - x - 2\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x+1}\right]$$
$$= 0$$

ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta_1)$ بجوار $+\infty$ معادلته: $y_{(\Delta_1)} = x + 2$

- لما: $x \in ]-\infty; -2]$:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x-2)] = \lim_{x \to -\infty} \left[-x - 2 + \frac{1}{x+1} + x + 2\right]$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{x+1}\right]$$
$$= 0$$

ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta_2)$ بجوار $-\infty$ معادلته: $y_{(\Delta_2)} = -x - 2$

ب/ دراسة الوضعية بين $(C_f)$ و $(\Delta_1)$ :

- لما: $x \in [-2; -1[ \cup ]-1; +\infty[$:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_{(\Delta_1)}$:

$$f(x) - y_{(\Delta_1)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ومنه:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) - y_{(\Delta_1)}$ | $-$ | $+$ | |

- إذن:
  - $(C_f)$ تحت $(\Delta_1)$ لما: $x \in [-2; -1[$
  - $(C_f)$ فوق $(\Delta_1)$ لما: $x \in ]-1; +\infty[$
- دراسة الوضعية بين $(C_f)$ و $(\Delta_2)$ :
- لما: $x \in ]-\infty; -2]$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_{(\Delta_2)}$:

$$f(x) - y_{(\Delta_2)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا: $(x+1) < 0$ على المجال $]-\infty; -2]$

ومنه: $\left(f(x) - y_{(\Delta_2)}\right) < 0$

- $(C_f)$ تحت $(\Delta_1)$ لما: $x \in ]-\infty; -2]$

❻ تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-\infty; -2]$ حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$:

لدينا: الدالة $f$ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -2]$

ولدينا: $f(-2.6) \times f(-2.7) < 0$ لأنّ $f(-2.7) \approx 0.11$ و $f(-2.6) \approx -0.02$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$.

❼ التمثيل البياني:

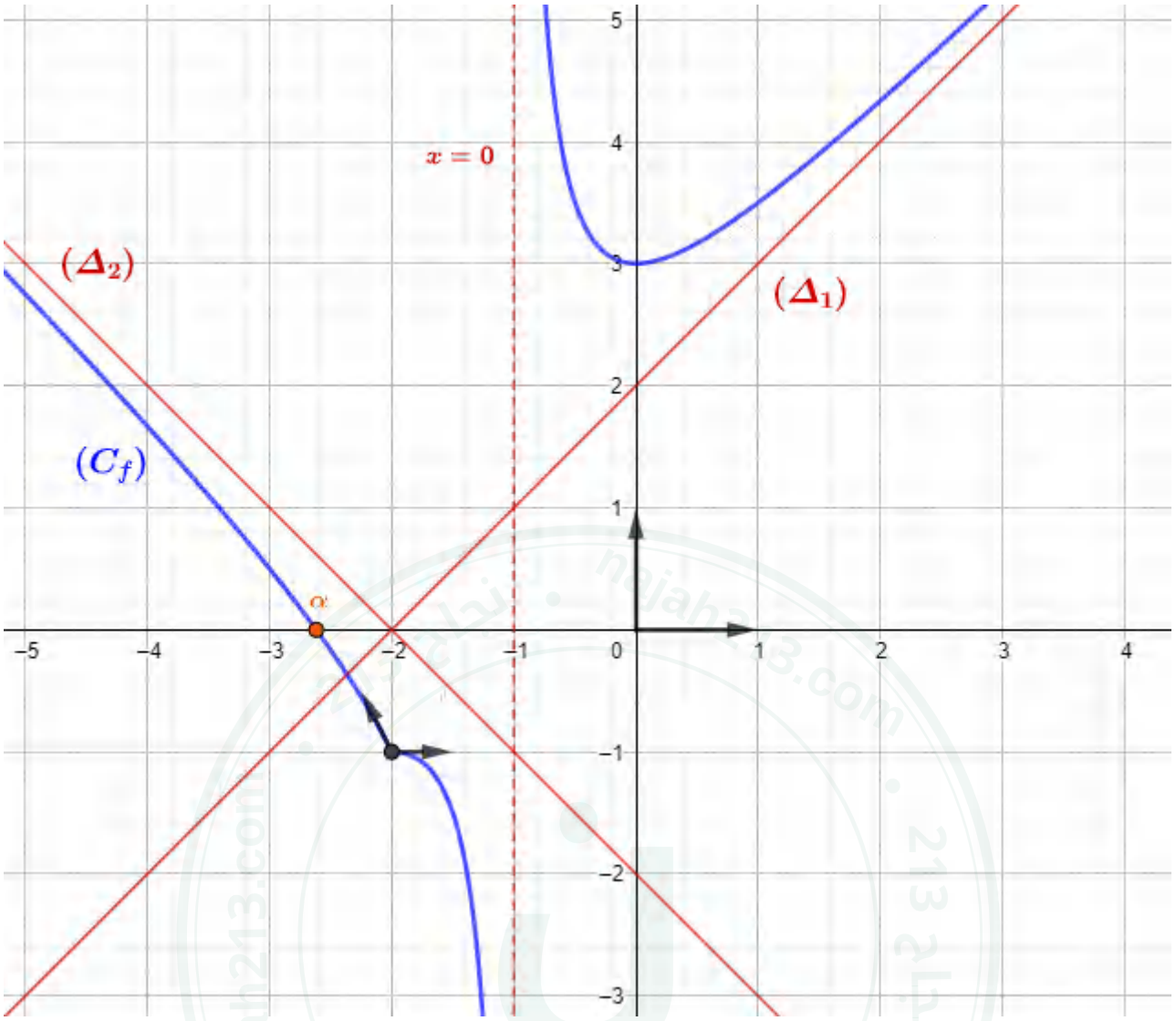
- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$.
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta_1)$ ذو المعادلة $y_{(\Delta_1)} = x + 2$.
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta_2)$ ذو المعادلة $y_{(\Delta_2)} = -x - 2$.
- نعين النقطة $\alpha$ نقطة تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل
- باستعمال جدول تغيرات الدالة $f$ نرسم $(C_f)$ . مع الاستعانة بوضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$

(ولا تنسى التركيز عند رسم البيان في النقطة ذات الاحداثيات $(-1; -2)$، لأن المنحنى هناك يقبل نصفي مماسين)



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com




♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥

لا تنسونا من صالح دعائكم

الخليل للرياضيات

#الخليل_للرياضيات