najah213.com · نجاح 213

الأستاذ قرايدية سمير — تقويم تشخيصي رقم 03 — بكالوريا 2022

## للسنوات النهائية

### التمرين الأول

✓ نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث: $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

نسمي $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أحسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها .

2) عين الأعداد الحقيقية $a$، $b$ و $c$ بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$ من ، $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

3) أحسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$ ثم أدرس إشارة $f'(x)$ .

4) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

5) أ- بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ .

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ .

6) بين أن $W(\alpha;\beta)$ نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر لـ $(C_f)$ .

7) أرسم كلا من $(C_f)$ و $(\Delta)$ .

8) $m$ عدد حقيقي ناقش بيانيا عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m$ .

✓ نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالشكل: $g(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{|x+1|}$

أ) أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

ب) بين كيف يمكن رسم $(C_g)$ المنحنى الممثل للدالة $g$ إنطلاقا من $(C_f)$ ثم أرسمه .

### التمرين الثاني

نعتبر الدّالّة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2-x^3}{(x-1)^2}$ ، وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) تحقّق أنّ الدّالّة $f$ تُكتب على الشكل: $f(x)=-(x+2)+\dfrac{4-3x}{(x-1)^2}$.

2) أحسب نهايات الدّالّة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها، فسّر النّتائج هندسيًا.

3) تحقّق أنّ: $f'(x)=\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(1-x)^3}$ ، شكّل جدول تغيّرات الدّالّة $f$.

أ) أثبت أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-(x+2)$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$.

ب) أدرس الوضع النّسبي بين المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$.

4) أرسم بدقّة المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

يُعطى: $f(0)=2$ ، $f(1,26)=0$ ، $f(2)=-6$ و $f(-1)=\dfrac{3}{4}$.

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## حلّ التمرين رقم 03

### حلّ التمرين الأول:

$f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ ; $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

1) نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = \dfrac{1}{0} = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = \dfrac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$

المستقيم المقارب الحودي للمنحنى $(C_f)$ هو $x=-1$

2) تبيان أن $f$ تكتب على الشكل:

$f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

(هناك طريقتان لما سوف يلي المقامات ثم المطابقة أو القسمة الاقليدية).

$f(x) = \dfrac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1}$

$f(x) = \dfrac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$

بالمطابقة نجد:

$\begin{cases} a=1 \\ a+b=2 \\ b+c=2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

أي:

$f(x) = x+1+\dfrac{1}{x+1}$

2) حساب $f'$ ودراسة إشارتها:

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ ودالتها المشتقة هي:

$f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x+1)-1(x^2+2x+2)}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{2x^2+2x+2x+2-x^2-2x-2}{(x+1)^2}$

$= \boxed{\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}} = \boxed{\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}}$

إشارة $f'$: ($(x+1)^2$ إشارة البسط كل المقام موجب تماما)

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

اتجاه التغير:

لما $x \in ]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$ الدالة $f'$ موجبة إذن $f$ متزايدة تماما

لما $x \in [-2;-1[\cup]-1;0]$ الدالة $f'$ سالبة إذن $f$ متناقصة تماما.

ص (1)

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

4) جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(-2)=-2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(0)=2$ | ↗ | $+\infty$ |

5) أ- تبيان أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty} x+1+\frac{1}{x+1}-(x+1)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

إذن $(\Delta): y=x+1$ م.م.م. للمنحنى $(C_f)$

ب- الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$

دراسة إشارة العبارة $f(x)-y$

$$f(x)-y = \frac{1}{x+1}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $+$ | | ‖ | $+$ | |
| $x+1$ | $-$ | | ‖ | $+$ | |
| $\frac{1}{x+1}$ | $-$ | | ‖ | $+$ | |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | | ‖ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | |

6) تبيان أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.

نبدأ بإيجاد نقطة التقاطع:

$$\begin{cases} x=-1 & \text{المقارب العمودي} \\ y=x+1 & \text{المقارب المائل} \end{cases}$$

أي $y=-1+1=0$

ومنه نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين $\Omega(-1;0)$

* إثبات أن $\Omega$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$

تذكير: $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$ يعني:

$$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$$

مع كون $(2\alpha-x)\in D_f$ كلما كان $x\in D_f$

$x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ أي $x\neq -1$

$-x\neq 1$ أي $-2-x\neq -1$

$(-2-x)\in D_f$ كلما كان $x\in D_f$ ومنه،

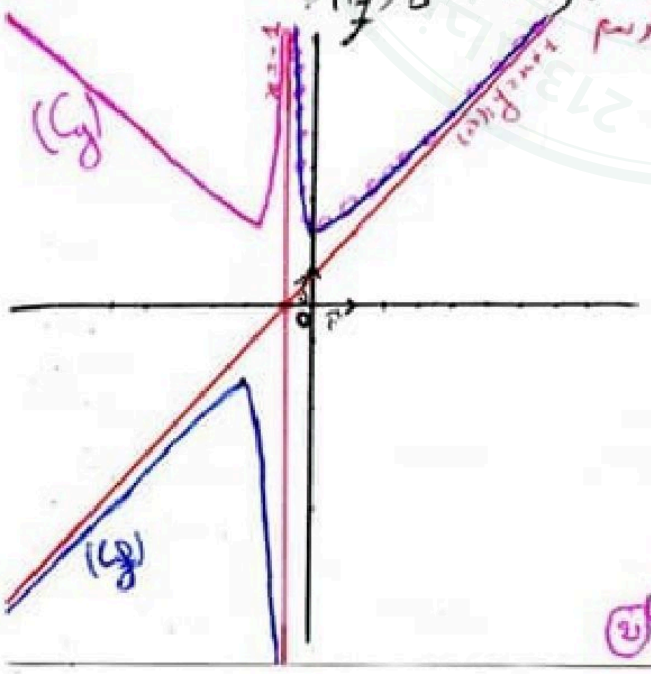
$$f(-2-x)+f(x)\overset{?}{=}0$$

$$\frac{1}{-2-x+1}+x+\frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{-x-1}+\frac{1}{x+1} = \frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x+1} = 0$$

ومنه فالنقطة $\Omega(-1;0)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$

الرسم




www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ب) عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$

$m \in ]-\infty;-2[$ حلان مختلفان سالبان

$m=-2$ حل مضاعف سالب.

$m \in ]-2;2[$ لا يوجد حلول.

$m=2$ حل مضاعف معدوم.

$m \in ]2;+\infty[$ حلان مختلفان في الإشارة.

$g(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{|x+1|}$ ; $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

أ) كتابة الدالة $g$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & ; x>-1 \\ -(x+1) & ; x<-1 \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=f(x) & ; x>-1 \\ -\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=-f(x) & ; x<-1 \end{cases}$$

ب) كيفية رسم $(\mathcal{G})$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$:

لما $x>-1$ لدينا: $g(x)=f(x)$

إذن $(\mathcal{G})$ منطبق على $(\mathcal{C}_f)$.

لما $x<-1$ لدينا: $g(x)=-f(x)$

أي $(\mathcal{G})$ هو نظير $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل.

الرسم انظر الشكل السابق.

## حل التمرين الثاني:

$f(x)=\dfrac{2-x^3}{(x-1)^2}$ ; $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

1) التحقق من أن $f$ تكتب على الشكل:

$f(x)=-(x+2)+\dfrac{4-3x}{(x-1)^2}$

(هناك طريقتان لما تو صيد المقامات م و القسمة الاقليدية).

حل1) توحيد المقامات:

$f(x)=\dfrac{-x^3+2x^2-x-2x^2+4x-2+4-3x}{(x-1)^2}$

$f(x)=\dfrac{2-x^3}{(x-1)^2}$ ✓

حل2) القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} -x^3+2 & x^2-2x+1 \\ \hline -x^3+2x^2-x & -x-2 \\ \hline -2x^2+x+2 & \\ \hline -2x^2+4x-2 & \\ \hline -3x+4 & \end{array}$$

$f(x)=-(x+2)+\dfrac{-3x+4}{(x-1)^2}$

✓

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

② نهايات الدالة $f$ :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-x^3}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-x) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^3}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-x) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{2-x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{2-x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2x+1$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $\|$ | $+$ |

$x=1$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ معادلته

$(+\infty)$ لـ $(C_f)$ حساب ،

③ تبيان أن $f'(x) = \dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(1-x)^3}$ ؟

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ،

ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{-3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)(2-x^3)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)\left[-3x^2(x-1) - 2(2-x^3)\right]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-3x^3+3x^2-4+2x^3}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{3x^2(x-1)+2(2-x^3)}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{3x^3-3x^2+4-2x^3}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{x^3-3x^2+4}{(1-x)^3}$$

الآن يكفي أن نثبت أن

$$x^3-3x^2+4 = (x-2)^2(x+1)$$

④ من طرق التحليل بما أن $x=1$ أن العدد $2$ هو جذر لـ $x^3-3x^2+4$

⑤ من طرق النشر

$$(x-2)^2(x+1) = (x^2-4x+4)(x+1)$$

$$= x^3+x^2-4x^2-4x+4x+4$$

$$= x^3-3x^2+4$$

إذن :

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)}{(1-x)^3}$$

بإشارة $f'(x)$ من إشارة البسط و المقام معاً.



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $(1-x)^3$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $-$ | |

$x \in ]-\infty;-1] \cup ]1;2[$ لما

الدالة $f$ سالبة تماما و $f$ متناقصة تماما

$x \in [-1;1[$ لما

الدالة $f$ موجبة تماما و $f$ متزايدة تماما

جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(-1)=\frac{3}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $\nearrow$ | $f(2)=-6$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

4) تبيان أن $(D): y=-(x+2)$ م.م.م لـ $(C_f)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-3x}{x^2-2x+1} =$$

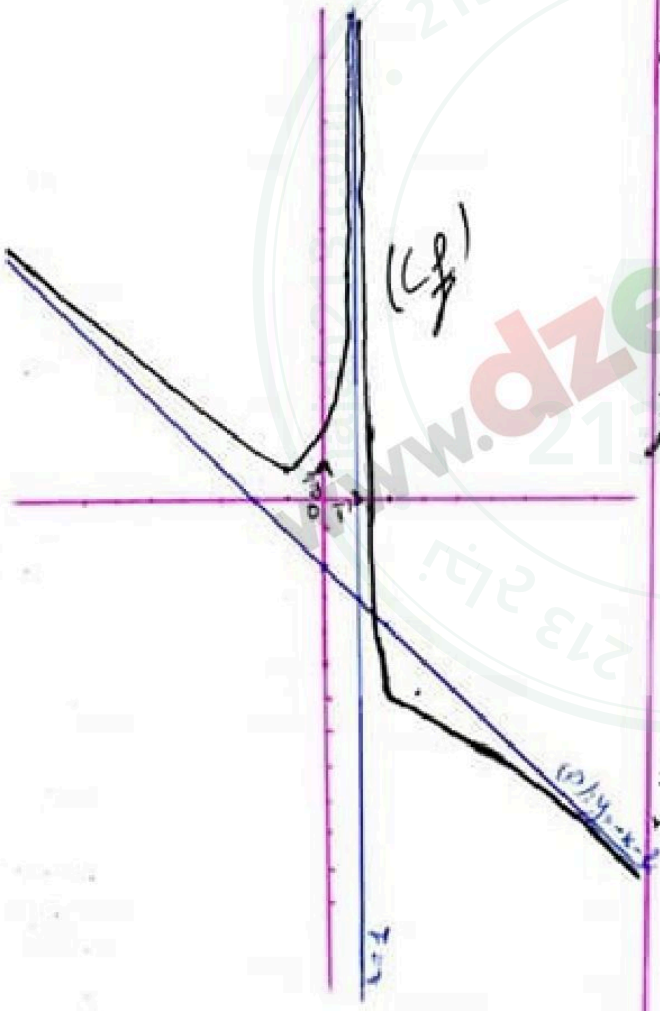
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

إذن $(D): y=-(x+2)$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $(-\infty;+\infty)$

العدد الذي يكتب $f(x)-y$ على الشكل $\frac{4-3x}{(x-1)^2}$ إشارة $4-3x$ لأن المقام موجب تماما

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{4}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4-3x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضع النسبي | | $(C_f)$ فوق $(D)$ | $(C_f)$ يقطع $(D)$ | $(C_f)$ تحت $(D)$ | |

الرسم:




www.dzexams.com