التحضير الممتاز للبكالوريا

3

ملخص
الربح في الوقت مع الصديق في الرياضيات

★ الدالة اللوغاريتمية



أقدم لإخواني الأساتذة وأبنائي الطلبة هذا العمل المتواضع والمتمثل في

ملخص الربح في الوقت مع الصديق في الرياضيات في الدالة اللوغاريتمية

للسنة الثالثة ثانوي جميع الشعب العلمية :

علوم تجريبية ★ رياضيات ★ تقني رياضي

للتحضير الممتاز للبكالوريا.

يتضمن هذه الملخص :

- الدالة اللوغاريتمية.
- دراسة الدوال من الشكل $x \mapsto \ln(u(x))$.
- المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$.

لا تنسونا من صالح الدعاء للوالدين الكريمين ولي. محبكم في الله الأستاذ : فراحتية المحفوظ



آخر تحديث: 2021/12/16

السنة الدراسية: 2022/2021

الأستاذ فراحتية المحفوظ للرياضيات | فراحتية المحفوظ | mahfoudferahtia@gmail.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

1 الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1.1 اللوغاريتم النيبيري لعدد:

برهنة وتعريف

✍ من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث: $e^b = a$ يسمى هذا العدد اللوغاريتم النيبيري للعدد a ونرمز له بالرمز "$\ln a$".

2.1 تعريف الدالة ln:

تعريف

✍ نسمي "الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" الدالة التي نرمز لها بالرمز $\ln$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln(x)$.

خواص

* من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$، $x = e^y$ معناه $y = \ln x$.
* من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $e^{\ln x} = x$.
ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\ln(e^x) = x$.
* بما أن $e^0 = 1$ فإن $\ln 1 = 0$.
وبما أن $e^1 = e$ فإن $\ln e = 1$.

★ ملاحظة:

✔ نقول أن الدالة "$\ln$" هي الدالة العكسية لـ "$\exp$".

خاصية

✍ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية واللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x$ (المنصف الأول).

3.1 خواص الدالة اللوغاريتمية:

خواص

✍ a و b عددان حقيقيان $]0;+\infty[$، و n عددان صحيح نسبي.

* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
* $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
* $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
* $\ln(a^n) = n\ln(a)$
* $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

★ ملاحظة:

✔ إذا كان x عدد حقيقي غير معدوم فإن $\ln(x^2) = 2\ln(|x|)$.

4.1 دراسة الدالة اللوغاريتمية:

❖ اتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية:

خاصية

✍ الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

نتائج

✍ من أجل كل عددين حقيقين a و b من $]0;+\infty[$:

* $\ln a > \ln b$ يعني أن $a > b$.
* $\ln a = \ln b$ يعني أن $a = b$.

★ حالات خاصة:

✍ من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

✔ $\ln x > 0$ يعني أن $e^{\ln x} > e^0$ وعليه $x > 1$.

✔ $\ln x < 0$ يعني أن $e^{\ln x} < e^0$ وعليه $0 < x < 1$.

✔ $\ln x = 0$ يعني أن $e^{\ln x} = e^0$ وعليه $x = 1$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

❖ النهايات :

خاصية

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ * $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ *

❖ الإشتقاقية والإستمرارية :

خاصية

✍ الدالة "ln" مستمرة على المجال $]0;+\infty[$.

خاصية

✍ الدالة "ln" قابلة للإشتقاق على على المجال $]0;+\infty[$
ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

❖ جدول التغيرات :

x	0		1		e		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	$+$		$+$		$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

❖ التمثيل البياني :

✍ المنحنى $(C_{\ln})$ الممثل للدالة ln يقبل حامل محور التراتيب كمستقيم مقارب.

✍ المنحنى $(C_{\ln})$ الممثل للدالة ln يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 1 معادلته $y = x - 1$.

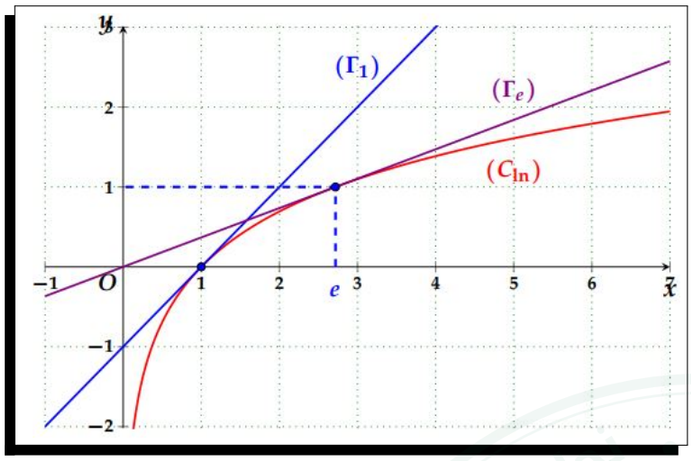
✍ بإستعمال تعريف العدد المشتق نجد:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \ln'(1) = 1$.

أو $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(h+1)}{h} = \ln'(1) = 1$.

✍ الدالة $x \mapsto x$ هي أحسن تقريب تألفي للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$ بجوار 0.

أي من أجل كل x قريب من 0 لدينا: $\ln(x+1) \simeq x$.



5.1 حل المعادلات والمتراجحات:

طريقة

☜ لحل معادلة من الشكل $\ln[u(x)] = a$
(متراجحة من الشكل $\ln[u(x)] < a$)
① نعين D مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة).
② نحل في D المعادلة $u(x) = e^a$
($u(x) < e^a$ المتراجحة).

طريقة

☜ لحل معادلة من الشكل $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$
(متراجحة من الشكل $\ln[u(x)] < \ln[v(x)]$)
① نعين D مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة).
② نحل في D المعادلة $u(x) = v(x)$
($u(x) < v(x)$ المتراجحة).

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

6.1 دراسة الدالة $\ln \circ u$: $(x \mapsto \ln[u(x)])$

❖ مجموعة تعريف الدالة $exp \circ u$:

مبرهنة

✍ نضع: $f(x) = \ln[u(x)]$ حيث u دالة عددية معرفة وموجبة على مجال D_u. مجموعة تعريف الدالة f هي نفسها مجموعة تعريف الدالة u، أي: $D_f = D_u$.

❖ النهايات:

مبرهنة

✍ لتكن a ، b و c أعداد حقيقية إما منتهية أو $-\infty$ أو $+\infty$. نعتبر الدوال التالية: u ، $\ln$ و f حيث $f = \ln \circ u$ و u معرفة وموجبة على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x \to b} \ln x = c$

فإن: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

❖ اتجاه تغير الدالة $\ln \circ u$:

مبرهنة

✍ إذا كانت u دالة معرفة وموجبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغير على I.

❖ مشتقة الدالة $\ln \circ u$:

مبرهنة

✍ إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق وموجبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة $\ln \circ u$ قابلة للإشتقاق على I.

ولدينا من أجل كل x من I، $(\ln \circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

✍ من أجل كل x من I، $(\ln \circ |u|)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

7.1 دراسة دالة اللوغاريتم العشري:

تعريف

✍ نسمي "دالة اللوغاريتم العشري" الدالة التي يرمز إليها بالرمز $\log$ والمعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

★ ملاحظة:

✔ خواص دالة اللوغاريتم العشري نفسها خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

✔ جدول التغيرات دالة اللوغاريتم العشري:

x	0		1		10		$+\infty$
$\log'(x)$	‖		$+$		$+$		
$\log(x)$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

خاصية

✍ إذا كان x عدد حقيقي حيث: $10^n \leq x \leq 10^{n+1}$

فإن: $n \leq x\log(x) \leq n+1$.

8.1 التزايد المقارن بين $\ln x$ ، e^x و x^n:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x \ln x = 0$	$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^n \ln x = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\ln x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt[n]{x}} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[n]{x}}{e^x} = 0$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

2 المعادلات التفاضلية

تمهيد : المعادلة التفاضلية هي معادلة المجهول فيها دالة نرمز إليها غالبا بالرمز y ، z ، ... كل معادلة تشمل الدالة ومشتقتها نسميها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى. حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ يعني البحث عن كل الدوال القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق: $f'(x) = af(x) + b$.

1.2 المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay$ مع $a \neq 0$:

مبرهنة

a عدد حقيقي غير معدوم.
حلول المعادلة $y' = ay$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto ce^x$، حيث c عدد حقيقي ثابت.

2.2 المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$:

مبرهنة

a عدد حقيقي غير معدوم.
حلول المعادلة $y' = ay + b$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto ce^x - \frac{b}{a}$، حيث c عدد حقيقي ثابت.

خاصية

من أجل كل ثنائية الأعداد حقيقية $(x_0; y_0)$، المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ تقبل حلا وحيدا يحقق: $f(x_0) = y_0$.

3 دوال القوى

1.3 قوى عدد حقيقي موجب:

تعريف

نضع $a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b \ln a}$ من أجل كل عددين حقيقين a و b حيث $a > 0$ و b كيفي.

تعريف

a عدد حقيقي موجب تماما. نسمي الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ الدالة الأسية ذات الأساس a.

4 دالة الجذر النوني

مبرهنة وتعريف

من أجل كل عدد حقيقي موجب a ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يوجد عدد حقيقي موجب وحيد b يحقق: $b^n = a$.
يسمى b الجذر النوني للعدد a ونرمز له بـ: $\sqrt[n]{a}$.
تسمى الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ حيث: $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ دالة الجذر النوني.

خاصية

من أجل كل عدد حقيقي موجب a ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا:
$\sqrt[n]{x} = a^{\frac{1}{n}} = e^{a \ln\left(\frac{1}{n}\right)}$.

إذا أردت الإستسلام ، تذكر مجهوداتك طوال كل هذه السنين .... عد وحاول مجددا.

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com