najah213.com · نجاح 213

الرياضيات في الثانوية

تمارين متنوعة حول المقارنة و الحصر

مرفقة بحلول مفصلة

للسنة أولى ثانوي

كتابة الأستاذ :

حناش نبيل

Novembre 2021

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

تمارين متنوعة في المقارنة و المجالات

التمرين رقم 01 :

1) بفرض a عدد حقيقي كيفي ، قارن العددين الحقيقيين a^2-8a و -16 .

2) استنتج دون استعمال الحاسبة ، مقارنة العددين الحقيقيين $2-8\sqrt{2}$ و -16 .

التمرين رقم 02 :

رتب تصاعديا الأعداد a و a^2 و a^3 في الحالتين :

- $a=\sqrt{2}-1$
- $a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

التمرين رقم 03 :

1) x عدد حقيقي حيث : $x\in]0;1[$ ، قارن العددين $(1-x)$ و $(1-x)^3$.

2) x عدد حقيقي حيث : $\dfrac{3}{2}<x<2$ ، رتب تصاعديا الأعداد في كل حالة :

- $2x-3$ ، $(2x-3)^2$ ، $(2x-3)^3$
- $4x+1$ ، $(4x+1)^2$ ، $(4x+1)^3$

التمرين رقم 04 :

بفرض $x<0$ و $y<0$ ، أنقل ثم أكمل الجدول التالي :

	صحيح	خاطئ	لا يمكن الحكم
$-2x<0$			
$-x+y<0$			
$x+y<0$			

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

$-x-y>0$			
$x-y<0$			

التمرين رقم 05 :

1) بفرض $a<b$ ، بين أن :

- $2a+1<2b+1$
- $3-a>3-b$

2) برهن أن :

- $x\geq 3$ **معناه** $2x+1\geq 7$
- $x\geq 5$ **معناه** $-x+4\leq -1$

التمرين رقم 06 :

a ، b و c أعداد حقيقية موجبة تماما .

- **بين أنه إذا كان** $a<b$ **فإن :** $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$
- **بين أنه إذا كان** $a<b$ **فإن :** $\frac{c}{b}<\frac{c}{a}$

التمرين رقم 07 :

عين المجالات التالية :

1) $[0;2]\cap]1;6]$ **2)** $[-2;2]\cap]-2;+\infty[$ **3)** $[-1;3]\cap]3;+\infty[$

4) $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cap\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

التمرين رقم 08 :

أكتب على شكل مجالات مجموعات الأعداد الحقيقية المعرفة بالمتباينات الآتية :

كتابة الأستاذ خناتي نبيل

1) $2 \le x \le 6$ 2) $-4 \le x \le 3$ 3) $x \le -2$ 4) $x > \sqrt{3}$

5) $x < 2$ و $x \ge -1$ 6) $-4 < x < 1$ أو $1 \le x \le 5$

التمرين رقم 09 :

أكتب على شكل مجالات أو إتحاد مجالات المجموعات الآتية :

$\mathbb{R}$ ، $\mathbb{R}^-$ ، $\mathbb{R}^+$ ، $\mathbb{R}^*$ ، $\mathbb{R}_+^*$

التمرين رقم 10 :

1) عين مركز و طول كل مجال :

$[-2;2]$ ، $[-0,5;0,1]$ ، $[-\pi+1;\pi+1]$

2) عين حدا المجال المغلق الذي مركزه $-5,3$ و طوله $0,7$.

التمرين رقم 11 :

أنقل ثم أكمل الجدول :

المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية x
$]-1;2[$	
	$2 \le x \le 5$
	$x \ge 0$
$\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$	
	$-2 \le x < 3$
$[5;+\infty[$	
	$x \le -\sqrt{2}$

التمرين رقم 12 :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

أنقل ثم أكمل الجدول التالي :

I	J	$I \cap J$	$I \cup J$
$[2;5]$	$[1;+\infty[$		
$]-1;3]$	$]-5;5[$		
$]-\infty;\frac{1}{2}[$	$]-\frac{5}{2};\frac{1}{3}]$		
$[1;2]$	$]\frac{1}{2};2[$		

التمرين رقم 13 :

A عدد حقيقي حيث : $A=\sqrt{20-6\sqrt{11}}-\sqrt{20+6\sqrt{11}}$

1) قارن بين العددين $\sqrt{20-6\sqrt{11}}$ و $\sqrt{20+6\sqrt{11}}$ (دون استعمال الحاسبة) ثم استنتج إشارة A .

2) أحسب A^2 ثم استنتج قيمة مبسطة للعدد A .

التمرين رقم 14 :

x عدد حقيقي موجب تماما . نضع : $A=\frac{x-1}{x}$ و $B=\frac{x}{x+1}$

1) أحسب الفرق $A-B$.

2) استنتج إشارة $A-B$ ، ثم قارن بين العددين A و B .

3) استنتج مقارنة بين العددين $\sqrt{\frac{2021}{2022}}$ و $\sqrt{\frac{2020}{2021}}$.

التمرين رقم 15 :

x و y عددان حقيقيان موجبان تماما .

1) بين أن : $\frac{1}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2xy}$

كتابة الأستاذ خناش نبيل

2) استنتج أن : $\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

التمرين رقم 16 :

a و b عددان حقيقيان حيث : $a \geq 2$ و $b \geq 2$

نضع : $x = \sqrt{ab+1}$ و $y = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

1) بين أن : $x^2 - y^2 = (a-1)(b-1)$

2) قارن بين العددين x^2 و y^2 ثم استنتج مقارنة بين x و y .

3) استنتج مقارنة بين العددين $\sqrt{6}$ و $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$.

التمرين رقم 17 :

α و β عددان حقيقيان موجبان تماما . نعتبر الأعداد الحقيقية X ، Y و Z حيث :

$X = \frac{\alpha+\beta}{2}$ ، $Y = \sqrt{\alpha\beta}$ ، $Z = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

1) قارن بين X^2 و Y^2 ، ثم استنتج مقارنة بين X و Y .

2) بين أن : $Y - Z = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2$ ثم استنتج أن : $Y \geq Z$

3) استنتج مما سبق مقارنة بين الأعداد X ، Y و Z .

التمرين رقم 18 :

α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha \geq \beta > 0$

أثبت صحة المتباينتين في كل حالة مما يلي :

كناش الأستاذ نبيل

- $\dfrac{\sqrt{\alpha+\beta}}{3}+\alpha^2 \geq \dfrac{\sqrt{2\beta}}{3}+\alpha^2$
- $-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\beta}\right) \leq -\left(\dfrac{\beta^2+1}{\beta}\right)$

تمارين متنوعة في الحصر

التمرين رقم 19 :

1) α عدد حقيقي حيث : $-1<\alpha<2$

أعط حصرا لكل من الأعداد التالية : $2\alpha+1$ ، $5\alpha-2$ ، $7-3\alpha$ ، $\dfrac{1}{2\alpha-5}$

2) β عدد حقيقي حيث : $2<\beta<3$

أعط حصرا للأعداد β^2 ، β^2-3 ، $50-\beta^2$ ، $\dfrac{2-\beta^2}{5}$ ، $\sqrt{\beta+1}$ ، $\dfrac{1}{\beta^2+2}$ ، $\dfrac{2}{3-\beta^2}$

يعطى أيضا عدد λ حيث : $1<\lambda<2$ ، أعط حصرا للعدد $\beta-2\lambda$.

3) علما أن : $2,36<A<2,37$ و $3,16<B<3,17$ ، أحصر الأعداد $\dfrac{1+A}{2}$ و $\dfrac{5-2B}{10}$

4) x و y عددان حقيقيان حيث : $\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ 1\leq y\leq 2\end{cases}$

أعط حصرا للأعداد التالية : $x+y$ ، $5x+y$ ، $7x+3y$ ، $-x-y$ ، $x-y$ ، $y-x$

$3x-2y$ ، x^2+y^2 ، $3x^2+y$

5) x و y عددان حقيقيان حيث : $\begin{cases}1\leq x\leq 5\\ 1\leq y\leq 4\end{cases}$

أعط حصرا للأعداد التالية : $N=3x-\sqrt{y}$ ، $M=\dfrac{x^2-x}{4}$ ، $K=\dfrac{(x-6)^2}{1+\sqrt{x+y}}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

6) بفرض z عدد حقيقي يحقق : $25 < z < 36$

أوجد حصرا للأعداد التالية : $\frac{1}{z}$ ، $\frac{1}{z^2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{z}}$

التمرين رقم 20 :

مستطيل طوله a و عرضه b حيث $a \in]134;135[$ و $b \in]25;26[$.

أوجد حصرا للمحيط P و للمساحة S و للقطر D لهذا المستطيل .

التمرين رقم 21 (رقم 89 ص 48 من الكتاب المدرسي) :

الهدف هو حصر $\sqrt{1+x}$

بفرض x عدد حقيقي موجب تماما ، نضع : $A = \sqrt{1+x}$ ، $B = 1 + \frac{x}{2}$ ، $C = \frac{x^2}{8} + \sqrt{1+x}$

1) بين أن كلا من A و B و C أكبر تماما من 1 .

2) قارن A^2 و B^2 و استنتج أن : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

3) بين أن :

$$C^2 - B^2 = \frac{x^2}{4}\left(\sqrt{1+x} + \frac{x^2}{16} - 1\right)$$

4) قارن B^2 و C^2 و استنتج أن :

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

تطبيق : دون استعمال حاسبة ، أعط حصرا للعدد $\sqrt{1,0002}$.

تمارين متنوعة في المقارنة و المجادلة

حل التمرين رقم 01 :

1) بفرض a عدد حقيقي كيفي ، المقارنة بين العددين الحقيقيين a^2-8a و -16 :

للمقارنة بين العددين a^2-8a و -16 نعتمد على إشارة الفرق $a^2-8a-(-16)$:

لدينا $a^2-8a-(-16)=a^2-8a+16=a^2-2(4)(a)+(4)^2$ أي

$a^2-8a-(-16)=(a-4)^2\geq 0$ و منه نستنتج أن : $a^2-8a\leq -16$

2) استنتاج دون استعمال الحاسبة ، مقارنة العددين الحقيقيين $2-8\sqrt{2}$ و -16 :

نستعمل نتيجة السؤال السابق من أجل $a=\sqrt{2}$ فنجد : $\left(\sqrt{2}\right)^2-8\sqrt{2}\leq -16$ معناه $2-8\sqrt{2}\leq -16$.

حل التمرين رقم 02 :

ترتيب تصاعديا الأعداد a و a^2 و a^3 في الحالتين :

✓ بما أن : $a=\sqrt{2}-1\approx 0,41$ فإن قوى العدد a ترتب ترتيبا تنازليا و منه $a^3\prec a^2\prec a$

✓ بما أن : $a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\approx 1,57$ فإن قوى العدد a ترتب ترتيبا تصاعديا و منه $a\prec a^2\prec a^3$

التمرين رقم 03 :

1) x عدد حقيقي حيث : $x\in]0;1[$ ، المقارنة بين العددين $(1-x)$ و $(1-x)^3$:

لدينا $x\in]0;1[$ معناه $0<x<1$ و منه $-1<-x<0$ و منه $0<1-x<1$ ، إذن قوى العدد $1-x$ ترتب ترتيبا تنازليا و منه : $(1-x)^3\prec 1-x$

2) x عدد حقيقي حيث : $\dfrac{3}{2}<x<2$ ، ترتيب تصاعديا الأعداد في كل حالة :

كتابة الأستاذ نبيل

- $2x-3$ ، $(2x-3)^2$ ، $(2x-3)^3$

لدينا $\frac{3}{2}<x<2$ **و منه** $3<2x<4$ **و منه** $0<2x-3<1$ **و بالتالي قوى العدد** $2x-3$ **ترتب ترتيبا تنازليا و منه :** $(2x-3)^3 \prec (2x-3)^2 \prec 2x-3$

- $4x+1$ ، $(4x+1)^2$ ، $(4x+1)^3$

لدينا $\frac{3}{2}<x<2$ **و منه** $6<4x<8$ **و منه** $7<4x+1<9$ **و بالتالي قوى العدد** $4x+1$ **ترتب ترتيبا تصاعديا و منه :** $4x+1 \prec (4x+1)^2 \prec (4x+1)^3$

حل التمرين رقم 04 : **بفرض** $x<0$ **و** $y<0$ **، إكمال الجدول التالي :**

	صحيح	خاطئ	لا يمكن الحكم
$-2x<0$		×	
$-x+y<0$			×
$x+y<0$	×		
$-x-y>0$	×		
$x-y<0$			×

1) بما أن $x<0$ **(سالب تماما) فإن معاكسه** $-x$ **موجب تماما أي** $-x>0$

2) بما أن $-x>0$ **(عدد موجب تماما)** **و** $y<0$ **(عدد سالب تماما) فإنه لا يمكن الحكم على مجموعهما**

3) مجموع عددين سالبين تماما هو عدد سالب تماما .

4) بما أن $x<0$ **(سالب تماما) فإن معاكسه** $-x$ **موجب تماما أي** $-x>0$ **و كذلك** $-y\geq 0$ **موجب تماما و بكتابة** $-x-y=-x+(-y)>0$ **لأن مجموع عددين موجبين تماما هو عدد موجب تماما .**

5) $x<0$ **(عدد سالب تماما)** **و** $-y>0$ **(عدد موجب تماما) حيث** $x-y=x+(-y)$ **مجموع عدد سالب تماما و عدد موجب تماما (لا يمكن الحكم على إشارة الناتج) .**

حل التمرين رقم 05 :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

1) بفرض $a<b$ ، نبين أن :

- $2a+1<2b+1$

بما أن $a<b$ و بضرب طرفي المتباينة في العدد الموجب تماما 2 ينتج : $2a<2b$ و إضافة نفس العدد 1 لطرفي المتباينة نجد : $2a+1<2b+1$ و هو المطلوب .

- $3-a>3-b$

بما أن $a<b$ و بضرب طرفي المتباينة في العدد السالب تماما -1 ينتج : $-a>-b$ و إضافة نفس العدد 3 لطرفي المتباينة نجد : $3-a>3-b$ و هو المطلوب .

2) إثبات أن :

- $x\geq 3$ معناه $2x+1\geq 7$

بما أن $x\geq 3$ فإنه بضرب الطرفين في العدد الموجب تماما 2 ينتج : $2x\geq 6$ و بإضافة نفس العدد 1 للطرفين نجد : $2x+1\geq 7$ و هو المطلوب .

- $x\geq 5$ معناه $-x+4\leq -1$

بما أن $x\geq 5$ فإنه بضرب الطرفين في العدد السالب تماما -1 ينتج : $-x\leq -5$ و بإضافة نفس العدد 4 للطرفين نجد : $-x+4\leq -1$ و هو المطلوب .

حل التمرين رقم 06 :

a ، b و c أعداد حقيقية موجبة تماما .

- إثبات أنه إذا كان $a<b$ فإن : $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

لدينا $a<b$ حيث $c>0$ و منه $\frac{1}{c}>0$ ، إذن بضرب طرفي المتباينة $a<b$ في نفس العدد الموجب تماما $\frac{1}{c}$ نجد : $\frac{1}{c}\times a<\frac{1}{c}\times b$ أي $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ و هو المطلوب .

- إثبات أنه إذا كان $a<b$ فإن : $\frac{c}{b}<\frac{c}{a}$

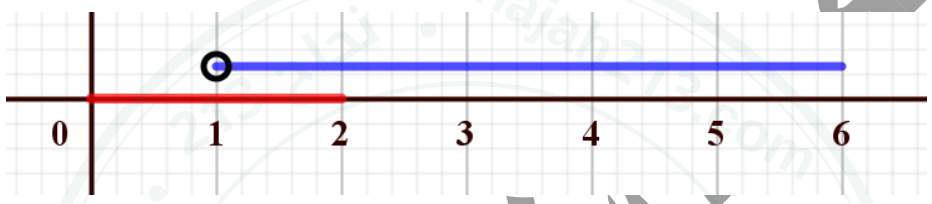
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

لدينا $0<a<b$ و منه $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ ، و بضرب طرفي المتباينة $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ في نفس العدد الموجب تماما c نجد $\frac{c}{b}<\frac{c}{a}$: و هو المطلوب .

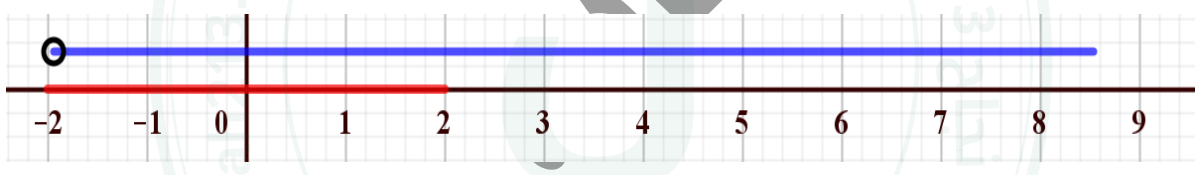
حل التمرين رقم 57 :

تعيين المجالات التالية :

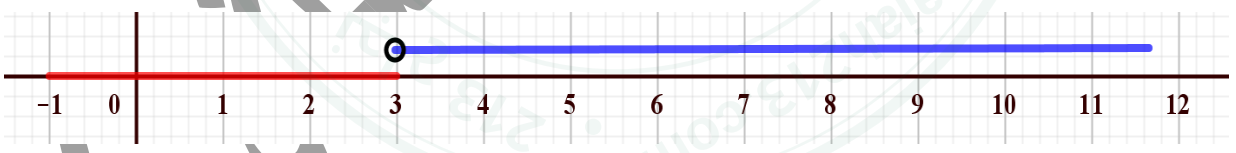
1) $[0;2]\cap]1;6]$: باستعمال مستقيم عددي مدرج نجد $[0;2]\cap]1;6]=]1;2]$



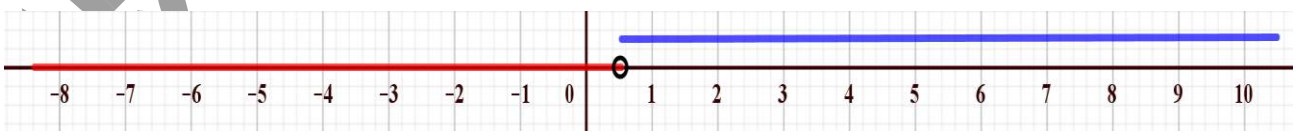
2) $[-2;2]\cap]-2;+\infty[$: باستعمال مستقيم عددي مدرج نجد $[-2;2]\cap]-2;+\infty[=]-2;2]$



3) $[-1;3]\cap]3;+\infty[$: باستعمال مستقيم عددي مدرج نجد $[-1;3]\cap]3;+\infty[=\varnothing$



4) $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cap\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$: باستعمال مستقيم عددي مدرج نجد $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cap\left[\frac{1}{2};+\infty\right[=\varnothing$

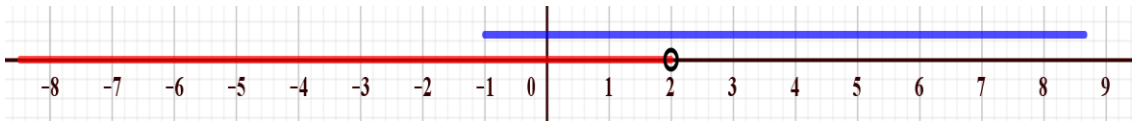


حل التمرين رقم 58 :

كتابة على شكل مجالات مجموعات الأعداد الحقيقية المعرفة بالمتباينات الآتية :

1) $2 \le x \le 6$: $x \in [2;6]$ **2)** $-4 \le x \le 3$: $x \in [-4;3]$ **3)** $x \le -2$: $x \in]-\infty;-2]$

4) $x > \sqrt{3}$: $x \in]\sqrt{3};+\infty[$ **5)** $x < 2$ و $x \ge -1$: $x \in]-\infty;2[\cap [-1;+\infty[$ **معناه** $x \in [-1;2[$



6) $-4 < x < 1$ أو $1 \le x \le 5$: $x \in]-4;-1[\cup [1;5]$

حل التمرين رقم 09 :

كتابة على شكل مجالات أو إتحاد مجالات المجموعات الآتية :

$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ ، $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$ ، $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$ ،

$\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$

حل التمرين رقم 10 :

1) تعيين مركز و طول كل مجال :

مركز المجال $[-2;2]$ **هو** $c = \dfrac{-2+2}{2} = 0$ **و طوله هو** $l = 2-(-2) = 2+2 = 4$

مركز المجال $[-0,5\ ;0,1]$ **هو** $c = \dfrac{-0,5+0,1}{2} = -0,2$ **و طوله هو** $l = 0,1-(-0,5) = 0,6$

مركز المجال $[-\pi+1;\pi+1]$ **هو** $c = \dfrac{-\pi+1+\pi+1}{2} = 1$ **و طوله هو** $l = \pi+1-(-\pi+1) = 2\pi$

2) تعيين حدا المجال المغلق الذي مركزه $-5,3$ **و طوله** $0,7$ **:**

نضع $I = [a;b]$ **حيث** $a < b$ **و باستعمال الشروط نعين العددين الحقيقيين** a **و** b **:**

طول المجال I **هو** $0,7$ **معناه :** $b-a = 0,7$

مركز المجال I **هو** $-5,3$ **معناه :** $\dfrac{a+b}{2} = -5,3$ **أي** $a+b = -10,6$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

إذن نتحصل على جملة معادلتين بمجهولين a و b هي : $\begin{cases} b-a=0,7 \\ a+b=-10,6 \end{cases}$ و بالجمع طرفا لطرف نتحصل على : $b-a+a+b=0,7-10,6$ أي $2b=-9,9$ و منه $b=-4,95$

و بتعويض قيمة b في المعادلة $a+b=-10,6$ نجد $a=-10,6+4,95$ أي $a=-5,65$

إذن : $I=[-5,65\,;-4,95]$ مركزه و طوله يحققان المعطيات .

حل التمرين رقم 11 :

المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية x
$]-1;2[$	$-1<x<2$
$[2;5]$	$2\leq x\leq 5$
$[0;+\infty[$	$x\geq 0$
$\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$	$x\leq\frac{1}{2}$
$[-2;3[$	$-2\leq x<3$
$[5;+\infty[$	$x\geq 5$
$\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$	$x\leq-\sqrt{2}$

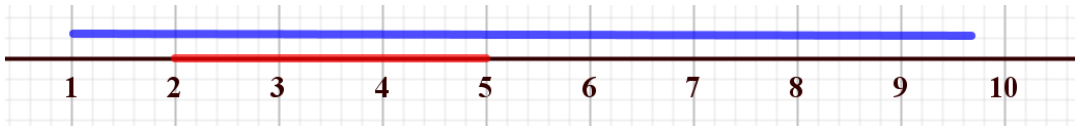
حل التمرين رقم 12 :

I	J	$I\cap J$	$I\cup J$
$[2;5]$	$[1;+\infty[$	$[2;5]$	$[1;+\infty[$
$]-1;3]$	$]-5;5[$	$]-1;3]$	$[-5;5]$
$\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$	$\left]-\frac{5}{2};\frac{1}{3}\right]$	$\left]-\frac{5}{2};\frac{1}{3}\right]$	$\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$
$[1;2]$	$\left]\frac{1}{2};2\right[$	$[1;2[$	$\left]\frac{1}{2};2\right]$

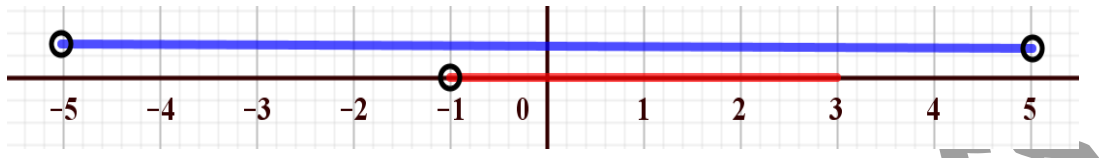
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

لتعيين تقاطع أو إتحاد مجالين يمكن الإعتماد على مستقيم عددي مدرج :

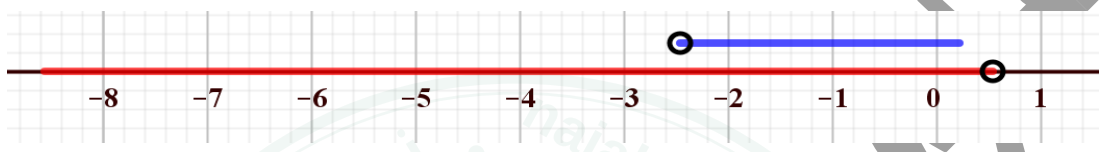
(1



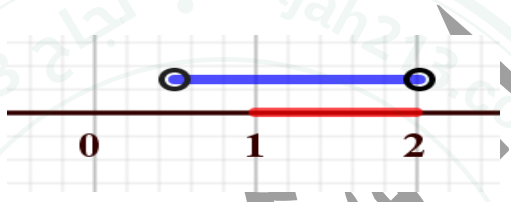
(2



(3



(4



حل التمرين رقم 13 :

A عدد حقيقي حيث : $A=\sqrt{20-6\sqrt{11}}-\sqrt{20+6\sqrt{11}}$

1) المقارنة بين العددين $\sqrt{20-6\sqrt{11}}$ و $\sqrt{20+6\sqrt{11}}$ (دون استعمال الحاسبة) :

لدينا : $0<20-6\sqrt{11}<20+6\sqrt{11}$ **و منه حسب قواعد المقارنة و بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحافظ على الترتيب فنجد :** $\sqrt{20-6\sqrt{11}}<\sqrt{20+6\sqrt{11}}$

بما أن $\sqrt{20-6\sqrt{11}}<\sqrt{20+6\sqrt{11}}\in\mathbb{R}_-^*$ **فإن** $\sqrt{20-6\sqrt{11}}<\sqrt{20+6\sqrt{11}}$ **و منه نستنتج أن إشارة** A **سالبة تماما معناه** $A\in\mathbb{R}_-^*$ **(** $A\prec 0$ **) .**

2) حساب A^2 **ثم استنتاج قيمة مبسطة للعدد** A **:**

$$A^2=\left(\sqrt{20-6\sqrt{11}}-\sqrt{20+6\sqrt{11}}\right)^2=20-\cancel{6\sqrt{11}}-2\sqrt{20-6\sqrt{11}}\times\sqrt{20+6\sqrt{11}}+20+\cancel{6\sqrt{11}}$$

و منه $A^2=40-2\sqrt{\left(20-6\sqrt{11}\right)\left(20+6\sqrt{11}\right)}$ **أي** $A^2=40-2\sqrt{(20)^2-\left(6\sqrt{11}\right)^2}$ **أي**

$A^2=40-2\sqrt{4}$ و منه $A^2=36$ ، إذن بما أن $A\prec 0$ فإن : $\boxed{A=-6}$.

حل التمرين رقم 14 :

1) حساب الفرق $A-B$:

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا : $A-B=\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)-x^2}{x(x+1)}$ أي

$A-B=\dfrac{x^2-1-x^2}{x(x+1)}$ و منه $\boxed{A-B=-\dfrac{1}{x(x+1)}}$

2) استنتاج إشارة $A-B$ ، ثم مقارنة العددين A و B :

من السؤال السابق لدينا :

$A-B=-\dfrac{1}{x(x+1)}$ حيث من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x فإن $x(x+1)>0$ و بما أن $-1<0$

فإن $-\dfrac{1}{x(x+1)}<0$ أي $A-B\prec 0$ معناه $A-B\in\mathbb{R}_-^*$ ($A-B$ عدد سالب تماما) .

الاستنتاج : من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x فإن $\boxed{A\prec B}$.

3) استنتاج مقارنة بين العددين $\sqrt{\dfrac{2021}{2022}}$ و $\sqrt{\dfrac{2020}{2021}}$:

تطبيق مباشر لنتيجة السؤال السابق من أجل $\boxed{x=2021}$: $A=\dfrac{2021-1}{2021}=\dfrac{2020}{2021}$ و

$B=\dfrac{2021}{2021+1}=\dfrac{2021}{2022}$ ، إذن $A\prec B$ معناه $\dfrac{2020}{2021}\prec\dfrac{2021}{2022}$ و حسب قواعد المقارنة و بأخذ الجذر

التربيعي للطرفين (كلاهما عدد حقيقي موجب) نحافظ على الترتيب فنجد : $\boxed{\sqrt{\dfrac{2020}{2021}}\prec\sqrt{\dfrac{2021}{2022}}}$

حل التمرين رقم 15 :

كتابة الأستاذ خناش نبيل

1) إثبات أن : $\dfrac{1}{x^2+y^2} \le \dfrac{1}{2xy}$

من أجل كل $x>0$ و $y>0$ لدينا : $(x-y)^2 \ge 0$ معناه $x^2+y^2-2xy \ge 0$ و بإضافة العدد $2xy$ للطرفين نتحصل على $x^2+y^2 \ge 2xy$ حيث $2xy>0$ و $x^2+y^2>0$ (لأن $x>0$ و $y>0$) معناه أن العددين x^2+y^2 و $2xy$ من نفس الإشارة ، إذن حسب قواعد المقارنة و بتطبيق المبرهنة (8) نتحصل على :

$$\boxed{\dfrac{1}{x^2+y^2} \le \dfrac{1}{2xy}}$$

2) استنتاج أن : $\dfrac{x+y}{x^2+y^2} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

لدينا $\dfrac{1}{y^2+x^2} \le \dfrac{1}{2xy}$ و بضرب الطرفين في نفس العدد الحقيقي الموجب تماما $x+y$ نجد :

$\dfrac{x+y}{y^2+x^2} \le \dfrac{x+y}{2xy}$ أي $\dfrac{x+y}{y^2+x^2} \le \dfrac{x}{2xy}+\dfrac{y}{2xy}$ أي $\dfrac{x+y}{y^2+x^2} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{xy}+\dfrac{y}{xy}\right)$ و منه

$$\boxed{\dfrac{x+y}{y^2+x^2} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)}$$ و هو المطلوب .

حل التمرين رقم 16 :

1) إثبات أن : $x^2-y^2=(a-1)(b-1)$

بالحساب لدينا : $x^2-y^2=\left(\sqrt{ab}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=ab+2\sqrt{ab}+1-\left(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b\right)$ أي

$x^2-y^2=ab-a-b+1$ أي $x^2-y^2=a(b-1)-(b-1)$ و منه بأخذ $(b-1)$ كعامل مشترك ينتج

$$\boxed{x^2-y^2=(b-1)(a-1)}$$ و هو المطلوب .

2) مقارنة العددين x^2 و y^2 ثم استنتاج مقارنة بين x و y :

نعلم أن : $a \ge 2$ و $b \ge 2$ و منه $a-1 \ge 1$ و $b-1 \ge 1$ ، و منه ينتج : $(a-1)(b-1) \ge 1$ معناه

$x^2-y^2\geq 1>0$ معناه $x^2-y^2\in\mathbb{R}_+^*$ و منه $\boxed{x^2>y^2}$

حيث $x=\sqrt{ab}+1>0$ و $y=\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ ، إذن $x^2>y^2$ يكافئ : $\boxed{x>y}$

3) استنتاج مقارنة بين العددين $\sqrt{6}$ و $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$:

$x>y$ معناه $\sqrt{ab}+1>\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و بصفة خاصة من أجل $\boxed{a=3}$ و $\boxed{b=2}$ نجد :

$\sqrt{3\times 2}+1>\sqrt{3}+\sqrt{2}$ أي $\sqrt{6}+1>\sqrt{3}+\sqrt{2}$ و منه نستنتج أن : $\boxed{\sqrt{6}>\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$

حل التمرين رقم 17 :

1) مقارنة X^2 و Y^2 ، ثم استنتاج مقارنة بين X و Y :

ندرس إشارة الفرق X^2-Y^2 :

لدينا : $X^2-Y^2=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\sqrt{\alpha\beta}^2=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta}{4}=\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{4}$ أي

$X^2-Y^2=\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}=\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\geq 0$ معناه $X^2-Y^2\in\mathbb{R}^+$ و منه : $\boxed{X^2\geq Y^2}$

بما أن X و Y عددان حقيقيان موجبان فإن $X^2\geq Y^2$ يكافئ : $\boxed{X\geq Y}$

2) إثبات أن : $Y-Z=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2$ ثم استنتاج أن : $Y\geq Z$

$Y-Z=\sqrt{\alpha\beta}-\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha\beta}-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha\beta}\left(1-\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\right)=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\left(\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}\right)$

أي $Y-Z=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\left(\sqrt{\alpha}^2+\sqrt{\beta}^2-2\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}\right)$ معناه $\boxed{Y-Z=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2}$.

الاستنتاج : بما أن α و β عددان موجبان تماما فإن العددين $\alpha+\beta$ و $\sqrt{\alpha\beta}$ موجبان تماما و

$\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2$ عدد موجب و منه فالعدد $Y-Z$ موجب ($Y-Z=0$ من أجل $\alpha=\beta$) و منه نستنتج أن $\boxed{Y\geq Z}$.

3) استنتاج مقارنة بين الأعداد X ، Y و Z :

من الأسئلة السابقة نتحصل على : $\boxed{X\geq Y\geq Z}$

حل التمرين رقم 18 :

إثبات صحة المتباينتين في كل حالة مما يلي :

- $\dfrac{\sqrt{\alpha+\beta}}{3}+\alpha^2\geq\dfrac{\sqrt{2\beta}}{3}+\alpha^2$

لدينا : $\alpha\geq\beta$ و منه بإضافة نفس العدد الحقيقي β للطرفين نجد $\alpha+\beta\geq 2\beta$ (مبرهنة 2) و منه بإدخال الجذر التربيعي على الطرفين (مبرهنة 7) حيث $\alpha+\beta$ و 2β عددان حقيقيان موجبان تماما ينتج : $\sqrt{\alpha+\beta}\geq\sqrt{2\beta}$ ثم بضرب طرفي المتباينة في العدد الموجب تماما $\dfrac{1}{3}$ (مبرهنة 4)

ينتج : $\dfrac{\sqrt{\alpha+\beta}}{3}\geq\dfrac{\sqrt{2\beta}}{3}$ و بإضافة نفس العدد الحقيقي α^2 (مبرهنة 2) للطرفين ينتج :

$\boxed{\dfrac{\sqrt{\alpha+\beta}}{3}+\alpha^2\geq\dfrac{\sqrt{2\beta}}{3}+\alpha^2}$ و هو المطلوب .

- $-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\beta}\right)\leq-\left(\dfrac{\beta^2+1}{\beta}\right)$

بما أن $\alpha>0$ و $\beta>0$ فإن $\alpha\geq\beta$ يكافئ $\alpha^2\geq\beta^2$ و بإضافة نفس العدد الحقيقي 1 (مبرهنة 2) للطرفين ينتج : $\alpha^2+1\geq\beta^2+1$ ثم بضرب الطرفين في نفس العدد الحقيقي الموجب تماما $\dfrac{1}{\beta}$ ينتج :

$\dfrac{\alpha^2+1}{\beta}\geq\dfrac{\beta^2+1}{\beta}$ (مبرهنة 4) و بضرب المتباينة في نفس العدد الحقيقي السالب تماما -1 ينتج :

$\boxed{-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\beta}\right)\leq-\left(\dfrac{\beta^2+1}{\beta}\right)}$ (مبرهنة 4) و هو المطلوب .

تمارين متنوعة في الجبر

حل التمرين رقم 19 :

1) α **عدد حقيقي حيث :** $-1<\alpha<2$

إعطاء حصر للأعداد التالية : $2\alpha+1$ ، $5\alpha-2$ ، $7-3\alpha$ ، $\dfrac{1}{2\alpha-5}$

لدينا : $-1<\alpha<2$ **و منه** $-1\times2<2\alpha<2\times2$ **أي** $-2<2\alpha<4$ **و منه** $-2+1<2\alpha+1<4+1$

إذن $\boxed{-1<2\alpha+1<5}$ **هو حصر للعدد** $2\alpha+1$.

لدينا : $-1<\alpha<2$ **و منه** $-1\times5<5\alpha<2\times5$ **أي** $-5<5\alpha<10$ **و منه**

$-5-2<5\alpha-2<10-2$ ، **إذن** $\boxed{-7<5\alpha-2<8}$ **هو حصر للعدد** $5\alpha-2$.

لدينا : $-1<\alpha<2$ **و منه** $(-1)\times(-3)>-3\alpha>2(-3)$ **أي** $3>-3\alpha>-6$ **و منه**

$7+3>7-3\alpha>7-6$ **أي** $10>7-3\alpha>1$ ، **إذن** $\boxed{1<7-3\alpha<10}$ **هو حصر للعدد** $7-3\alpha$.

لدينا : $-1<\alpha<2$ **و منه** $2\times(-1)<2\alpha<2\times2$ **أي** $-2<2\alpha<4$ **و منه**

$-2-5<2\alpha-5<4-5$ ، **إذن** $-7<2\alpha-5<-1$ **و بما أن الأعداد** -7 ، $2\alpha-5$ ، -1 **من نفس الإشارة (سالبة تماما) فإن** $\boxed{-1<\dfrac{1}{2\alpha-5}<-\dfrac{1}{7}}$ **هو حصر للعدد** $\dfrac{1}{2\alpha-5}$.

2) β **عدد حقيقي حيث :** $2<\beta<3$

إعطاء حصر للأعداد β^2 ، β^2-3 ، $50-\beta^2$ ، $\dfrac{2-\beta^2}{5}$ ، $\sqrt{\beta+1}$ ، $\dfrac{1}{\beta^2+2}$ ، $\dfrac{2}{3-\beta^2}$:

لدينا : $2<\beta<3$ **حيث** 2 ، β ، 3 **أعداد حقيقية موجبة و منه** $\boxed{4<\beta^2<9}$ **هو حصر للعدد** β^2 .

بما أن $4<\beta^2<9$ **فإن** $4-3<\beta^2-3<9-3$ ، **إذن** $\boxed{1<\beta^2-3<6}$ **هو حصر للعدد** β^2-3 .

بما أن $4<\beta^2<9$ **فإن** $-4>-\beta^2>-9$ **و منه** $50-4>50-\beta^2>50-9$ **أي** $46>50-\beta^2>41$

كتابة الأستاذ نبيل

إذن $\boxed{41<50-\beta^2<46}$ هو حصر للعدد $50-\beta^2$.

بما أن $-9<-\beta^2<-4$ فإن $2-9<2-\beta^2<2-4$ أي $-7<2-\beta^2<-2$ معناه

$-7<2-\beta^2<-2$ و بضرب الأطراف في العدد الموجب تماما $\frac{1}{5}$ نجد $\boxed{-\frac{7}{5}<\frac{2-\beta^2}{5}<-\frac{2}{5}}$ و هو حصر

للعدد $\frac{2-\beta^2}{5}$.

لدينا : $2<\beta<3$ و منه $2+1<\beta+1<3+1$ أي $3<\beta+1<4$ حيث $\beta+1$ ، 3 ، 4 أعداد حقيقية

موجبة و منه $\boxed{\sqrt{3}<\sqrt{\beta+1}<2}$ هو حصر للعدد $\sqrt{\beta+1}$.

بما أن $4<\beta^2<9$ فإن $4+2<\beta^2+2<9+2$ أي $6<\beta^2+2<11$ و بما أن الأعداد β^2+2 ، 6 ،

11 من نفس الإشارة (موجبة تماما) فإن : $\boxed{\frac{1}{11}<\frac{1}{\beta^2+2}<\frac{1}{6}}$ هو حصر للعدد $\frac{1}{\beta^2+2}$.

بما أن $-9<-\beta^2<-4$ فإن $3-9<3-\beta^2<3-4$ أي $-6<3-\beta^2<-1$ معناه $-6<3-\beta^2<-1$

حيث $3-\beta^2$ ، -1 ، -6 أعداد حقيقية سالبة تماما و منه $\boxed{-1<\frac{1}{3-\beta^2}<-\frac{1}{6}}$ هو حصر للعدد $\frac{1}{3-\beta^2}$.

يعطى أيضا عدد λ حيث : $1<\lambda<2$ ، إعطاء حصر للعدد $\beta-2\lambda$:

لدينا : $1<\lambda<2$ و منه $1(-2)>-2\lambda>2(-2)$ أي $-2>-2\lambda>-4$ معناه $\boxed{-4<-2\lambda<-2}$

و بما أن $\boxed{2<\beta<3}$ و حيث $\beta-2\lambda=\beta+(-2\lambda)$ ، إذن بالجمع طرفا لطرف نتحصل على :

$2+(-4)<\beta-2\lambda<3+(-2)$ و منه $\boxed{-2<\beta-2\lambda<1}$ هو حصر للعدد $\beta-2\lambda$.

3) علما أن : $2,36<A<2,37$ و $3,16<B<3,17$ ، إعطاء حصر للعددين $\frac{1+A}{2}$ و $\frac{5-2B}{10}$:

لدينا : $2,36<A<2,37$ و منه $1+2,36<1+A<1+2,37$ أي $3,36<1+A<3,37$ و منه

$\frac{3,36}{2}<\frac{1+A}{2}<\frac{3,37}{2}$ ، إذن $\boxed{1,68<\frac{1+A}{2}<1,685}$ هو حصر للعدد $\frac{1+A}{2}$.

لدينا : $3,16<B<3,17$ و منه $-2\times3,16>-2B>-2\times3,17$ أي $-6,32>-2B>-6,34$ و منه

$5-6,32>5-2B>5-6,34$ أي $-1,32>5-2B>-1,34$ و منه $-\frac{1,32}{10}>\frac{5-2B}{10}>-\frac{1,34}{10}$

أي $-0,132>\frac{5-2B}{10}>-0,134$ ، إذن $\boxed{-0,134<\frac{5-2B}{10}<-0,132}$ هو حصر للعدد $\frac{5-2B}{10}$.

4) x و y عددان حقيقيان حيث : $\begin{cases}-1\le x\le1\\1\le y\le2\end{cases}$

إعطاء حصر للأعداد التالية : $x+y$ ، $5x+y$ ، $7x+3y$ ، $-x-y$ ، $x-y$ ، $y-x$

$3x-2y$ ، x^2+y^2 ، $3x^2+y$ ، $x+\sqrt{y}$:

بالجمع طرفا لطرف نتحصل على : $-1+1\le x+y\le1+2$ معناه $0\le x+y\le3$ هو حصر للعدد $x+y$

بما أن $-1\le x\le1$ فإن $-5\le5x\le5$ و بالجمع طرفا لطرف مع $1\le y\le2$ نجد

$-5+1\le5x+y\le5+2$ ، إذن $\boxed{-4\le5x+y\le7}$ هو حصر للعدد $5x+y$.

بما أن $-1\le x\le1$ و $1\le y\le2$ فإن $-7\le7x\le7$ و $3\le3y\le6$ و بالجمع طرفا لطرف ينتج :

$-7+3\le7x+3y\le7+6$ ، إذن $\boxed{-4\le7x+3y\le13}$ هو حصر للعدد $7x+3y$.

بما أن $-1\le x\le1$ و $1\le y\le2$ فإن $1\ge-x\ge-1$ و $-2\le-y\le-1$ و بالجمع طرفا لطرف ينتج :

$1-1\ge-x-y\ge-1-2$ أي $0\ge-x-y\ge-3$ ، إذن $\boxed{-3\le-x-y\le0}$ هو حصر للعدد $-x-y$.

بكتابة $x-y=x+(-y)$ حيث $-1\le x\le1$ و $-2\le-y\le-1$ فإنه بالجمع طرفا لطرف ينتج :

$-1-2\le x+(-y)\le1-1$ ، إذن $\boxed{-3\le x-y\le0}$ هو حصر للعدد $x-y$.

بكتابة $y-x=y+(-x)$ حيث $1\le y\le2$ و $-1\le-x\le1$ فإنه بالجمع طرفا لطرف ينتج :

$1-1\le y+(-x)\le2+1$ ، إذن $\boxed{0\le y-x\le3}$ هو حصر للعدد $y-x$.

بكتابة $3x-2y=3x+(-2y)$ حيث $-1\le x\le1$ و $-2\le-y\le-1$ و منه $-3\le3x\le3$ و

كتابة الأستاذ نبيل

$-4 \le -2y \le -2$ و بالجمع طرفا لطرف ينتج : $-3-4 \le 3x+(-2y) \le 3-2$ ، إذن

$\boxed{-7 \le 3x-2y \le 1}$ هو حصر للعدد $3x-2y$.

- تعيين حصر للعدد x^2+y^2 : لدينا $1 \le y \le 2$ حيث y ، 1 ، 2 أعداد حقيقية موجبة و منه ينتج :

$1 \le y^2 \le 4$ (مبرهنة 6) .

لتعيين حصر للعدد x^2 **نفصل الحالات** : لدينا $-1 \le x \le 1$ معناه $-1 \le x \le 0$ أو $0 \le x \le 1$ ؛

إذا كان $-1 \le x \le 0$ فإن : $(-1)^2 \le x^2 \le (0)^2$ (نعكس الترتيب) أي $0 \le x^2 \le 1$ و إذا كان $0 \le x \le 1$

فإن $(0)^2 \le x^2 \le (1)^2$ (نحافظ على الترتيب) أي $0 \le x^2 \le 1$ - مبرهنة 6 -

إذن نستنتج أنه إذا كان $-1 \le x \le 1$ فإن $0 \le x^2 \le 1$ و منه نجد $0+1 \le x^2+y^2 \le 1+4$ ، إذن

$\boxed{1 \le x^2+y^2 \le 5}$ هو حصر للعدد x^2+y^2 .

بما أن $0 \le x^2 \le 1$ فإن $0 \le 3x^2 \le 3$ حيث $1 \le y \le 2$ ، و بالجمع طرفا لطرف نجد :

$0+1 \le 3x^2+y \le 3+2$ ، إذن $\boxed{1 \le 3x^2+y \le 5}$ هو حصر للعدد $3x^2+y$.

لدينا : $1 \le y \le 2$ (الأعداد موجبة) و منه حسب المبرهنة (7) ينتج $1 \le \sqrt{y} \le \sqrt{2}$ ، و منه بالجمع

طرفا لطرف نجد $-1+1 \le x+\sqrt{y} \le 1+\sqrt{2}$ ، إذن $\boxed{0 \le x+\sqrt{y} \le \sqrt{2}+1}$ هو حصر للعدد $x+\sqrt{y}$.

5) بفرض z عدد حقيقي يحقق : $25 < z < 36$

إيجاد حصر للأعداد التالية : $\frac{1}{z}$ ، $\frac{1}{z^2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{z}}$

الأعداد 25 ، z ، 36 من نفس الإشارة (موجبة تماما) و منه حسب المبرهنة (8) ينتج $\frac{1}{25} \ge \frac{1}{z} \ge \frac{1}{36}$

إذن $\boxed{\frac{1}{36} \le \frac{1}{z} \le \frac{1}{25}}$ هو حصر للعدد $\frac{1}{z}$.

لدينا : $\frac{1}{36} \le \frac{1}{z} \le \frac{1}{25}$ حيث $\frac{1}{z}$ ، $\frac{1}{36}$ ، $\frac{1}{25}$ أعداد حقيقية موجبة و منه حسب المبرهنة (6) ينتج :

كتابة الأستاذ نبيل

$\left(\frac{1}{25}\right)^2 \le \left(\frac{1}{z}\right)^2 \le \left(\frac{1}{36}\right)^2$ (نحافظ على الترتيب) ، إذن $\boxed{\frac{1}{25^2} \le \frac{1}{z^2} \le \frac{1}{36^2}}$ هو حصر للعدد $\frac{1}{z^2}$.

طريقة 2 : لدينا $\frac{1}{25} \le \frac{1}{z} \le \frac{1}{36}$ و كذلك $\frac{1}{36} \le \frac{1}{z} \le \frac{1}{25}$ حيث $\frac{1}{36}$ ، $\frac{1}{z}$ ، $\frac{1}{25}$ أعداد حقيقية موجبة تماما و منه حسب المبرهنة (4) و بالضرب طرفا لطرف نتحصل على $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36} \le \frac{1}{z} \times \frac{1}{z} \le \frac{1}{25} \times \frac{1}{25}$

معناه $\boxed{\frac{1}{25^2} \le \frac{1}{z^2} \le \frac{1}{36^2}}$ هو حصر للعدد $\frac{1}{z^2}$.

لدينا : $\frac{1}{25} \le \frac{1}{z} \le \frac{1}{36}$ حيث $\frac{1}{25}$ ، $\frac{1}{z}$ ، $\frac{1}{36}$ أعداد حقيقية موجبة تماما ، و منه حسب المبرهنة (8) ينتج

$\sqrt{\frac{1}{25}} \le \sqrt{\frac{1}{z}} \le \sqrt{\frac{1}{36}}$ (نحافظ على الترتيب) أي $\boxed{\frac{1}{5} \le \frac{1}{\sqrt{z}} \le \frac{1}{6}}$ حصر للعدد $\frac{1}{\sqrt{z}}$.

طريقة 2 : لدينا $25 \le z \le 36$ حيث 25 ، z ، 36 أعداد حقيقية موجبة تماما ، و منه حسب المبرهنة (8) ينتج $\sqrt{25} \le \sqrt{z} \le \sqrt{36}$ أي $5 \le \sqrt{z} \le 6$ (نحافظ على الترتيب) و بما أن الأعداد 5 ، $\sqrt{z}$ ، 6 من نفس الإشارة (موجبة تماما) فإنه حسب المبرهنة (8) ينتج $\boxed{\frac{1}{6} \le \frac{1}{\sqrt{z}} \le \frac{1}{5}}$ (نعكس الترتيب) .

6) x و y عددان حقيقيان حيث : $\begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 1 \le y \le 4 \end{cases}$

إيجاد حصر للأعداد التالية : $N = 3x - \sqrt{y}$ ، $M = \frac{x^2 - x}{4}$ ، $K = \frac{(x-6)^2}{1+\sqrt{x+y}}$

لدينا : $1 \le x \le 5$ و منه $3 \le 3x \le 15$ (لأن $3 > 0$) و بما أن الأعداد 1 ، y ، 4 موجبة تماما فإن

$1 \le y \le 4$ يكافئ $1 \le \sqrt{y} \le 2$ (مبرهنة 8) و منه $-1 \ge -\sqrt{y} \ge -2$ معناه $-2 \le -\sqrt{y} \le -1$ ، و

بكتابة $3x - \sqrt{y} = 3x + (-y)$ و بالجمع طرفا لطرف نتحصل على : $3 - 2 \le 3x + (-y) \le 15 - 1$ ، إذن

$1 \le 3x - \sqrt{y} \le 14$ هو حصر للعدد $3x - \sqrt{y}$ و منه $\boxed{1 \le N \le 14}$.

بما أن $1\le x\le 5$ و الأعداد 1 ، x ، 5 موجبة فإنه حسب المبرهنة **(6)** ينتج $1\le x^2\le 25$ ، و من جهة أخرى فإن $-5\le -x\le -1$ معناه $-5\le -x\le -1$ و بكتابة $x^2-x=x^2+(-x)$ و بالجمع طرفا لطرف (مبرهنة **3**) ينتج $1-5\le x^2+(-x)\le 25-1$ أي $-4\le x^2-x\le 24$ و منه $-\frac{4}{4}\le\frac{x^2-x}{4}\le\frac{24}{4}$ ،

إذن $-1\le\frac{x^2-x}{4}\le 6$ هو حصر للعدد $\frac{x^2-x}{4}$ و منه $\boxed{-1\le M\le 6}$.

لدينا : $1\le x\le 5$ و منه $1-6\le x-6\le 5-6$ (مبرهنة **2**) أي $-5\le x-6\le -1$ حيث أن الأعداد -5 ، $x-6$ ، -1 سالبة تماما و منه حسب المبرهنة **(6)** ينتج $(-1)^2\le(x-6)^2\le(-5)^2$ (نعكس الترتيب) أي $1\le(x-6)^2\le 25$ ..... **(*)**

و من جهة أخرى لدينا : $1\le x\le 5$ و $1\le y\le 4$ و منه بالجمع طرفا لطرف (مبرهنة **3**) ينتج : $1+1\le x+y\le 4+5$ أي $2\le x+y\le 9$ و كون الأعداد 2 ، $x+y$ ، 9 موجبة تماما فإنه حسب المبرهنة **(7)** ينتج : $\sqrt{2}\le\sqrt{x+y}\le 3$ (نحافظ على الترتيب) و منه حسب المبرهنة **(2)** و بإضافة العدد 1 إلى جميع الأطراف ينتج : $\sqrt{2}+1\le 1+\sqrt{x+y}\le 4$ و كون الأعداد $\sqrt{2}+1$ ، $1+\sqrt{x+y}$ ، 4 من نفس الإشارة (موجبة تماما) فإنه حسب المبرهنة **(8)** ينتج :

$\frac{1}{4}\le\frac{1}{1+\sqrt{x+y}}\le\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ..... **(**)** ، إذن من العلاقتين **(*)** و **(**)** و بالضرب طرفا لطرف حسب المبرهنة **(4)** ينتج (لاحظ أن جميع الأعداد في **(*)** و **(**)** موجبة تماما) :

$1\times\frac{1}{4}\le(x-6)^2\times\frac{1}{1+\sqrt{x+y}}\le 25\times\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ أي $\frac{1}{4}\le\frac{(x-6)^2}{1+\sqrt{x+y}}\le\frac{25}{\sqrt{2}+1}$ ، إذن :

$$\boxed{\frac{1}{4}\le K\le\frac{25}{\sqrt{2}+1}}$$

حل التمرين رقم 20 :

$a\in]134;135[$ و $b\in]25;26[$ معناه $134<a<135$ و $25<b<26$:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

محيط المستطيل يعطى بالقانون : $\boxed{P=2(a+b)}$

و بما أن $134<a<135$ و $25<b<26$ فإنه بالجمع طرفا لطرف (مبرهنة 3) ينتج :

$134+25<a+b<135+26$ أي $159<a+b<161$ و بما أن $2\succ 0$ فإنه ينتج :

$318<2(a+b)<322$ ، إذن نستنتج أن : $\boxed{318<P<322}$

مساحة المستطيل تعطى بالقانون : $\boxed{S=a\times b}$

و بما أن $134<a<135$ و $25<b<26$ حيث أن جميع الأعداد في أطراف المتباينتين هي أعداد موجبة تماما و منه بالضرب طرفا لطرف (مبرهنة 5) ينتج : $134\times 25<a\times b<135\times 26$ أي

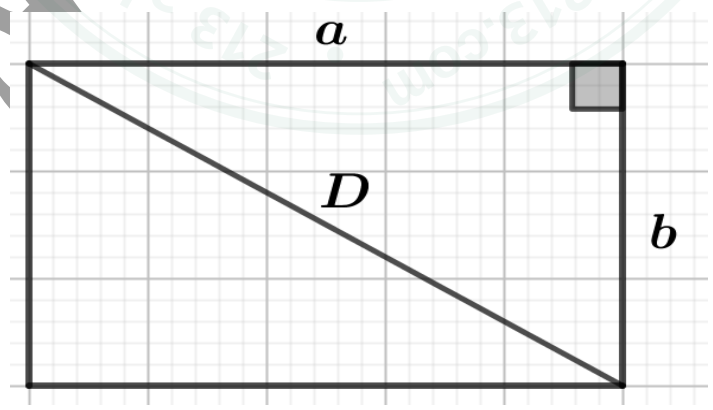
$3350<a\times b<3510$ ، إذن نستنتج أن : $\boxed{3350<S<3510}$

ليكن D قطرا لهذا المستطيل ، من نظرية فيثاغورس في المثلث القائم ينتج : $D^2=a^2+b^2$ معناه

$D=\sqrt{a^2+b^2}$ ، إذن إيجاد حصر لـ D معناه إيجاد حصر لـ $\sqrt{a^2+b^2}$:

لدينا : $134<a<135$ و $25<b<26$ (جميع الأعداد موجبة في المتباينتين) و منه حسب المبرهنة (6) ينتج : $134^2<a^2<135^2$ و $25^2<b^2<26^2$ أي $17956<a^2<18225$ و $625<b^2<676$

و بالجمع طرفا لطرف ينتج : $18581<a^2+b^2<18901$ (جميع الأعداد موجبة في المتباينة) و منه حسب المبرهنة (7) ينتج : $136,31<\sqrt{a^2+b^2}<137,48$ ، إذن نستنتج أن : $\boxed{136,31<D<137,48}$



حل التمرين رقم 21 : (رقم 89 من الكتاب المدرسي)

1) نبين أن كلا من A و B و C أكبر تماما من 1 :

x عدد حقيقي موجب تماما معناه $x>0$ و منه $1+x>1$ و منه $\sqrt{1+x}>\sqrt{1}$ أي $\sqrt{1+x}>1$ ، إذن $\boxed{A>1}$.

$x>0$ و منه $\frac{1}{2}\times x>\frac{1}{2}\times 0$ أي $\frac{x}{2}>0$ و منه $1+\frac{x}{2}>1+0$ أي $1+\frac{x}{2}>1$ ، إذن $\boxed{B>1}$.

$\frac{x^2}{8}>0$ و بما أن $\sqrt{1+x}>1$ فإنه بالجمع طرفا لطرف ينتج : $\frac{x^2}{8}+\sqrt{1+x}>1$ معناه $\boxed{C>1}$.

2) مقارنة A^2 و B^2 و استنتاج أن : $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$

لمقارنة A^2 و B^2 ندرس إشارة الفرق :

$A^2-B^2=\sqrt{1+x}^2-\left(1+\frac{x}{2}\right)^2$ معناه $A^2-B^2=1+x-\left(1+\frac{x^2}{4}+2\times 1\times\frac{x}{2}\right)$ أي $A^2-B^2=-\frac{x^2}{4}$

و بما أن $-\frac{x^2}{4}<0$ (عدد حقيقي سالب تماما) فإن $A^2-B^2\in\mathbb{R}^*_-$ و بالتالي $\boxed{A^2<B^2}$.

A و B عددان حقيقيان موجبان تماما ، إذن $A^2<B^2$ يكافئ $\boxed{A<B}$ معناه $\boxed{\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}}$

3) إثبات أن : $C^2-B^2=\frac{x^2}{4}\left(\sqrt{1+x}+\frac{x^2}{16}-1\right)$

لدينا : $C^2-B^2=\left(\frac{x^2}{8}+\sqrt{1+x}\right)^2-\left(1+\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^4}{64}+1+x+\frac{x^2\sqrt{1+x}}{4}-1-\frac{x^2}{4}-x$ أي

$C^2-B^2=\frac{x^4}{64}+\frac{x^2\sqrt{1+x}}{4}-\frac{x^2}{4}$ و منه $\boxed{C^2-B^2=\frac{x^2}{4}\left(\sqrt{1+x}+\frac{x^2}{16}-1\right)}$.

4) مقارنة B^2 و C^2 و استنتاج أن : $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$

بما أن $\frac{x^2}{4}>0$ (عدد حقيقي موجب تماما) فإن إشارة الفرق C^2-B^2 من إشارة $\sqrt{1+x}+\frac{x^2}{16}-1$ ، حيث

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

من السؤال **1-** نعلم أن $\sqrt{1+x}>1$ و بما أن $\frac{x^2}{16}>0$ (عدد حقيقي موجب تماما) فإنه بالجمع طرفا لطرف

ينتج $\sqrt{1+x}+\frac{x^2}{16}>1$ و منه $\sqrt{1+x}+\frac{x^2}{16}-1>1-1$ أي $\sqrt{1+x}+\frac{x^2}{16}-1>0$ معناه

$\sqrt{1+x}+\frac{x^2}{16}-1\in\mathbb{R}_+^*$ ، إذن $C^2-B^2\in\mathbb{R}_+^*$ و بالتالي $\boxed{C^2>B^2}$.

B و C أعداد حقيقية موجبة تماما ، إذن $C^2>B^2$ يكافئ $\boxed{C>B}$ معناه $\boxed{\frac{x^2}{8}+\sqrt{1+x}>1+\frac{x}{2}}$

و منه نكتب : $\boxed{\sqrt{1+x}>1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}}$

الإستنتاج : من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن : $\boxed{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}}$

تطبيق : دون استعمال حاسبة ، إعطاء حصر للعدد $\sqrt{1,0002}$:

نكتب العدد $\sqrt{1,0002}$ من الشكل $\sqrt{1+x}$ كما يلي : $\sqrt{1,0002}=\sqrt{1+0,0002}$ معناه $\boxed{x=0,0002}$

إذن حسب الإستنتاج أعلاه فإن : $\boxed{1+\frac{0,0002}{2}-\frac{0,0002^2}{8}\le\sqrt{1,0002}\le1+\frac{0,0002}{2}}$

لا تنسونا من صالح دعائكم ...

صفحة : الرياضيات في الثانوية