najah213.com · نجاح 213

مديرية التربية لولاية بومرداس — ثا/ المجاهد علال العيشاوي

السنة الدراسية: $\overline{3750}^{8}$ / $\overline{3751}^{8}$ — المدة: $\overline{1210}^{5}$ دقيقة

اختـــبار الثلاثي الثاني في مـــادة الريـاضيـــات — المستوى: $\overline{11}^{2}$ رياضياتي

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $8x-5y=3$.....(I).

2) ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية $(p;q)$ من الاعداد الصحيحة تحقق: $m=8p+1$ و $m=5q+4$.

أ- بين ان الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة (I)، ثم استنتج أن: $m\equiv 9[40]$.

ب- عين اصغر عدد طبيعي m بحيث: $m\geq 2025$.

3) ليكن n عددا طبيعيا.

أ- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي k لدينا: $2^{3k}\equiv 1[7]$.

ب- ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left[2^{2025}\right]^{2026}$ على 7 ؟

4) ليكن a و b عددان طبيعيان حيث: $0\prec a\leq 9$ و $0\prec b\leq 9$ ونعتبر العدد N الذي يكتب في النظام العشري على الشكل: $N=\overline{a00b}$ $(N=a\times 10^3+b)$.

نريد تعيين من ضمن هذه الاعداد الطبيعية تلك التي تقبل القسمة على 7.

أ- تحقق من ان: $10^3\equiv -1[7]$

ب- استنتج الاعداد الطبيعية التي N تقبل القسمة على 7.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بـ: $U_1=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $U_{n+1}=\dfrac{(n+1)U_n}{U_n+2n}$.

1) أ- تحقق انه من كل عدد طبيعي n غير معدوم فان: $U_{n+1}=(n+1)\left[1-\dfrac{2n}{U_n+2n}\right]$ و $\dfrac{n+1}{2n+1}\leq 1$

(لاحظ ان $2\leq 1$)

ب- برهن بالتراجع انه من كل عدد n غير معدوم: $0\prec U_n\leq 1$

2) أ- تحقق انه من كل عدد طبيعي n غير معدوم فان: $U_n\succ 1-n$.

ب- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $U_{n+1}-U_n=\dfrac{U_n(1-n-U_n)}{U_n+2n}$.

ج- استنتج ان المتتالية (U_n) متناقصة تماما ثم برر تقاربها.

3) نعتبر من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم المتتالية (V_n) المعرفة بـ: $V_n=\dfrac{U_n}{U_n+n}$

- بين المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_1.

4) أ- اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $U_n=\dfrac{n}{2^n-1}$.

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ب- تحقق ان: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{n\ln 2}{e^{n\ln 2}}\right)$ ثم احسب هاته النهاية واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

ج- احسب العدد S حيث: $S=\frac{1}{U_1}+\frac{2}{U_2}+\frac{3}{U_3}+.....+\frac{2025}{U_{2025}}$

5) من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع:

$$S_n=2\left(\frac{2U_1+1^2}{U_1+1}\right)+2\left(\frac{3U_2+2^2}{U_2+2}\right)+2\left(\frac{4U_3+3^2}{U_3+3}\right)+.....+2\left(\frac{(n+1)U_n+n^2}{U_n+n}\right)$$

- بين انه اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فان: $S_n=n^2+n+2-2^{1-n}$ واستنتج ان:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_{45n}}{n^2}\right)=2025$$

التمرين الثالث: (09 نقاط)

I) باستعمال قابلية الاشتقاق للدالة $x\to\ln x$ عند 1.

- بين ان: $\lim\limits_{n\to1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)=1$ ثم استنتج ان: $\lim\limits_{n\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.

II) f دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي $x\geq1$، $f(x)=\ln x+\ln(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})$.

ب- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي $x\geq1$: $\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=x-1\right)$.

ج – اثبت ان الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1، فسر النتيجة هندسيا .

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي $x\geq1$: $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة.

ج- شكل جدول تغيراتها على المجال $]1;+\infty[$.

3) ارسم المنحنى (C_f).

4) لتكن S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=3$ ، $x=1$.

A و B نقطتان من المنحنى (C_f) فاصلتاهما على الترتيب: 1 و 3. والنقطتان $C(1;2\ln(1+\sqrt{2}))$ و $D(3;0)$ من المستوي.

أ- احسب مساحة كل من المستطيل $ACBD$ والمثلث ABD.

ب- استنتج ان: $2\ln(1+\sqrt{2})\leq S\leq4\ln(1+\sqrt{2})$. (ارشاد: $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$).

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

III) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{e^{2x}+1}{2e^{x}}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) اثبت انه من اجل كل $x\geq 0$: $g(x)\geq 1$

2) أ- بين ان: $(g\circ f)(x)=x$ ثم اثبت انه اذا كانت $M(x;y)$ نقطة من (C_g) فان $M'(y;x)$ نقطة من (C_g).

ب - ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_f) و (C_g)؟

ج- ارسم المنحنى (C_g) في نفس المعلم السابق.

3) لتكن S' مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=0$ ، و $y=3$ و $x=2\ln(1+\sqrt{2})$

أ- اثبت ان: $S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)\,dx$

ب- احسب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)\,dx$ ثم استنتج قيمة S.

www.dzexams.com

وفقكم الله في شهادة البكالوريا 2025 يا تلامذتي الأعزاء ⚽- عن الأستاذة مزنر

" حاولوا أن تكونوا في حياة الناس كحبة سكر☺، حتى وإن اختفت,,,,,,,تركت طعما جميلا"

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

التصحيح النموذجي لاختبار الفصل الثاني:

حل تمرين الأول: (04ن)

1) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $8x - 5y = 3 \quad \text{.....} \; (I)$

الثنائية $(1;1)$ حل خاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (I)

ومنه:

$$\begin{cases} 8x - 5y = 3 \\ 8x_0 - 5y_0 = 3 \end{cases} \ominus$$

$$8(x - x_0) - 5(y - y_0) = 0$$

$$8(x - 1) = 5(y - 1)$$

بما أن $8 / 5(y-1)$ و $PGCD(8;5) = 1$ فإنه حسب

مبرهنة غوص فإن: $8 / y-1$ أي $y - 1 = 8K$

ومنه: $\boxed{y = 8K + 1}$ $K \in \mathbb{Z}$

ولدينا، $5 / 8(x-1)$ و $PGCD(5;8) = 1$

ومنه حسب غوص: $5 / x-1$ أي $x - 1 = 5K$

$\boxed{x = 5K + 1} \; K \in \mathbb{Z}$

ومنه،

$$S_{(I)} = \{(x;y) \in \mathbb{Z}^2 / (x;y) = (5K+1; 8K+1)_{K \in \mathbb{Z}}\}$$

2 - أ) إثبات أن الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة (I)

واستنتاج أن: $m \equiv 9[40]$

لدينا: $m = 8p + 1$ و $m = 5q + 4$

يكافئ: $m = 8p + 1 = 5q + 4$

$\Rightarrow 8p - 5q = 3 \Rightarrow (p;q) \in S_{(I)}$

ولدينا: $m = 8p + 1 = 8(5K + 1) + 1$

$= 40K + 9$

ومنه، $\boxed{m \equiv 9[40]}$

أو باستعمال $m = 5q + 4$ مع تعويض $q = 8K + 1$

ب) تعيين أصغر عدد طبيعي m بحيث: $m \geq 2025$

$m \geq 2025 \Leftrightarrow 40K + 9 \geq 2025 \Leftrightarrow K > \frac{2016}{40} \geq 50{,}4$

بما أن $K \in \mathbb{N}$ فإن: $\boxed{K = 50}$ ؛ ومنه: $m = 40(50) + 9$

$\boxed{m = 2009}$

3 - أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي K لدينا: $2^{3K} \equiv 1[7]$،

لدينا، $2^{3K} = (2^3)^K = 8^K$

و $8 \equiv 1[7]$ ومنه، $8^K \equiv 1[7]$ إذن: $\boxed{2^{3K} \equiv 1[7]}$

ب) ايجاد باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2^{2025})^{2026}$ على 7:

لدينا، $2025 = 3 \times 675 = 3K$

ومنه:

$2^{2025} \equiv 2^{3K} \; [7]$

$2^{2025} \equiv 1 \; [7]$ $\quad / \; 2^{3K} \equiv 1[7]$

$(2^{2025})^{2026} \equiv 1^{2026} \; [7]$

$(2^{2025})^{2026} \equiv 1 \; [7]$

ومنه باقي قسمة $(2^{2025})^{2026}$ على 7 هو 1.

4 - أ) التحقق من أن: $10^3 \equiv -1[7]$:

لدينا، $10 \equiv 3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 3^3 [7]$

$\equiv 27 [7]$

$\equiv 6 [7]$

$$\boxed{10^3 \equiv -1[7]}$$

$N = \overline{a00b} = a.10^3 + b$

مع $0 < a \leq 9$ و $0 < b \leq 9$

ب) استنتاج الأعداد الطبيعية التي N تقبل القسمة على 7:

حاسبق، $10^3 \equiv -1[7]$ و $N = a10^3 + b$

لدينا، $10^3 \equiv -1[7] \Rightarrow 10^3 a + b \equiv -a + b \; [7]$

وبما أن N يقبل القسمة على 7 فإن، $N \equiv 0[7]$

أي، $-a + b \equiv 0[7]$ ومنه $a \equiv b[7]$

إذن: $(a;b) = \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5),$
$(6;6), (7;7), (8;8), (9;9), (7;0),$
$(1;8), (8;1), (2;9), (9;2)\}$

$0 < a \leq 9$
$0 < b \leq 9$

$N = \{1001; 2002; 3003; 4004; 5005; 6006; 7007;$
$8008; 9009; 1008; 8001; 2009;$
$9002\}$

www.dzexams.com

najah213.com · نجاح 213

حل تمرين 02 (07 نقاط)

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{(n+1)U_n}{U_n + 2n} \end{cases}$$

1- البرهان بالتراجع أن $U_n > 0$ من أجل كل $n \geq 1$:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U_{n+1} = (n+1)\left[1 - \frac{2n}{U_n + 2n}\right]$$

ولدينا: $n \leq 2n$ ومنه: $1 \leq 2$

ومنه: $\frac{n+1}{2n+1} \leq 1$; $U_{n+1} = (n+1)\left[1 - \frac{2n}{U_n+2n}\right]$

$$(n+1)\left[1 - \frac{2n}{U_n+2n}\right] = (n+1)\left[\frac{U_n+2n-2n}{U_n+2n}\right]$$

$$= \frac{(n+1)U_n}{U_n+2n} = U_{n+1}$$

ومنه: $U_{n+1} = (n+1)\left[1 - \frac{2n}{U_n+2n}\right]$ *

ولدينا: $n+1 \leq 2n+1$ ومنه:

ومنه: $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n+1}$

وبما أن $(n+1) \geq 1$ فإن: $\frac{n+1}{n+1} \geq \frac{n+1}{2n+1}$

أي: $\frac{n+1}{2n+1} \leq 1$ *

البرهان بالتراجع أن: $0 < U_n \leq 1$.

$P(n)$: $0 < U_n \leq 1$ نضع:

نتأكد من صحة الخاصية من أجل $n=1$: $P(1)$: $U_1 = 1 \leq 1$

ومنه: $P(1)$ محققة.

- نفرض $0 < U_n \leq 1$ ونبرهن صحة $0 < U_{n+1} \leq 1$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم،

لدينا: $0 < U_n \leq 1$

ومنه: $2n < U_n + 2n \leq 2n+1$

ومنه: $\frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{U_n+2n} < \frac{1}{2n}$

ومنه: $-1 < \frac{-2n}{U_n+2n} \leq \frac{-2n}{2n+1}$

ومنه: $0 < 1 - \frac{2n}{U_n+2n} \leq \frac{1}{2n+1}$

ومنه: $0 < (n+1)\left(1 - \frac{2n}{U_n+2n}\right) \leq \frac{(n+1)}{2n+1}$

$0 < U_{n+1} \leq 1$

ومنه: $P(n+1)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

إذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$; $0 < U_n \leq 1$،

2- البرهان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$; $U_n > 1-n$

لدينا: $1 \leq n$ ومنه: $-1 \leq -n$

ومنه: $0 \leq n-1$ (سالب)

ولدينا: $0 < U_n \leq 1$ $\quad n-1 < U_n$

ومنه بالتقدي فإن: $1-n < U_n$

أي: $U_n > 1-n$

بالإثبات أن: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n(1-n-U_n)}{U_n+2n}$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)U_n}{U_n+2n} - U_n$$

$$= \frac{(n+1)U_n - U_n(U_n+2n)}{U_n+2n}$$

$$= \frac{(n+1)U_n - U_n^2 - 2nU_n}{U_n+2n}$$

$$= \frac{U_n(n+1-U_n-2n)}{U_n+2n} = \frac{U_n(1-n-U_n)}{U_n+2n}$$ *

ج) استنتاج أن (U_n) متقاربة:

(U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$ ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة.

3- إثبات أن (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_1:

$V_n = \dfrac{U_n}{U_{n+n}}$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا:

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{U_{n+1+n+1}} = \frac{\frac{(n+1)U_n}{U_n+2n}}{\frac{(n+1)U_n}{U_n+2n} + n+1}$$

$$= \frac{(n+1)\left[\frac{U_n}{U_n+2n}\right]}{(n+1)\left[\frac{U_n}{U_n+2n}+1\right]} = \frac{\frac{U_n}{U_n+2n}}{\frac{U_n+U_n+2n}{U_n+2n}}$$

$$= \frac{U_n}{2U_n+2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_n}{U_n+n}\right) = \frac{1}{2}V_n$$

ومنه (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

وحدها الأول ،

$$V_1 = \frac{U_1}{U_1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4-IP كتابة عبارة V_n بدلالة n :

$$V_n = V_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{1}{2^n}} \quad *$$

ب) استنتاج أن : $U_n = \frac{n}{2^n-1}$:

لدينا :

$$V_n = \frac{U_n}{U_n+n}$$

ومنه :

$$V_n(U_n+n) = U_n$$

$$V_n U_n + nV_n = U_n$$

$$V_n U_n - U_n = -nV_n$$

$$U_n(V_n-1) = -nV_n$$

$$U_n(1-V_n) = nV_n$$

ومنه :

$$U_n = \frac{nV_n}{1-V_n}$$

وعليه ، حيث $V_n = \frac{1}{2^n}$

$$U_n = \frac{n\left(\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{2^n-1}{2^n}} = \boxed{\frac{n}{2^n-1}} \quad \#$$

ج) التحقق أن : $\lim \left(\frac{n}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{n\ln 2}{e^{n\ln 2}}\right)$

ثم حسابها واستنتاج : $\lim U_n$

لدينا :

$$\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{n\ln 2}{e^{n\ln 2}}\right) = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{n\ln 2}{e^{\ln 2^n}}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{n\ln 2}{2^n}\right) = \boxed{\frac{n}{2^n}} \quad \#$$

ومنه :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{n\ln 2}{e^{n\ln 2}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{1}{\frac{e^{n\ln 2}}{n\ln 2}}\right] = 0$$

لأن : $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n\ln 2}}{n\ln 2} = +\infty$

* استنتاج $\lim U_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2^n-1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2^n}\right) = 0$$

(من س 2) ،

I-15 حساب S

$$S = \frac{1}{U_1} + \frac{2}{U_2} + \frac{3}{U_3} + \cdots + \frac{2025}{U_{2025}}$$

$(n\in\mathbb{N})$ $W_n = \frac{n}{U_n} = \frac{n}{\frac{n}{2^n-1}} = \frac{n(2^n-1)}{n}$: تنتج

ومنه $\boxed{W_n = 2^n - 1}$

إذن :

$$S = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_{2025}$$

$$= 2^1 - 1 + 2^2 - 1 + 2^3 - 1 + \cdots + 2^{2025} - 1$$

$$= (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2025}) + 1(2025 - 1 + 1)$$

مجموع أمانيها وحدها الأول $q=2$

$$= 1\left(\frac{2^{2025}-1}{2-1}\right) - 2025$$

$$= (2^{2025} - 1) - 2025 = \boxed{2^{2025} - 2026} \quad *$$

ب) إثبات أن : $S_n = n^2 + n + 2 - 2^{1-n}$:

$$S_n = 2\left(\frac{2U_1+1^2}{U_1+1}\right) + 2\left(\frac{3U_2+2^2}{U_2+2}\right) + \cdots + 2\left(\frac{(n+1)U_n+n^2}{U_n+n}\right)$$

لدينا :

$$\frac{(n+1)U_n+n^2}{U_n+n} = \frac{nU_n+U_n+n^2}{U_n+n}$$

$$= \frac{U_n}{U_n+n} + \frac{nU_n+n^2}{U_n+n}$$

$$= V_n + \frac{n(U_n+n)}{U_n+n}$$

$$\boxed{S_n = V_n + n} \quad \#$$

ومنه :

$$S_n = 2(V_1+1) + 2(V_2+2) + 2(V_3+3) + \cdots + 2(V_n+n)$$

$$= 2\left[(V_1+V_2+V_3+\cdots+V_n) + (1+2+3+\cdots+n)\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) + \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= 2 + n^2 + n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boxed{n^2+n+2-2^{1-n}}$$

* استنتاج $\lim \left(\frac{S_{45n}}{n^2}\right)$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_{45n}}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{45n^2+45n+2-2^{1-45n}}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2025n^2+45n+2-2^{1-45n}}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(2025 + \frac{45}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{2^{1-45n}}{n^2}\right)$$

$$= \boxed{2025} \quad \#$$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

حلّ التمرين 03 (09 نقاط)

I) إثبات صحة النهايتين الشهيرتين:

- $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = g'(1) = 1$

لأن: $g(x)=\ln x$ ← $g(1)=\ln 1=0$.

$g'(x)=\frac{1}{x}$ ← $g'(1)=\frac{1}{1}=1$

ومنه: $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$

ونضع: $X = x-1$ ؛ ومنه $x = X+1$

ومنه: $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{X\to 0}\frac{\ln(X+1)}{X} = 1$

II) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ / $D_f = [1,+\infty[$

1- إثبات أنه من أجل كل $x \geq 1$ ؛

$f(x) = \ln x + \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \ln\left[x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right]$

$= \ln\left[x + x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]$

$= \ln\left[x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]$

$f(x) = \ln x + \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$ #

بإثبات أن: $x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = x-1$ لديك:

$x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\times\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = x\sqrt{\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)x^2}}$

$= \frac{x}{x}\sqrt{\frac{(x-1)(x-1)(x+1)}{(x+1)\cdot}}$

$= \sqrt{(x-1)^2} = x-1$; لأن: $x \geq 1$

$x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = x-1$ # ؛ إذن:

ج) إثبات أن الدالة f تقبل نصف مماس عمودي عند 1 ثم التفسير الهندسي:

حسب النهاية:

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ / $f(1)=0$

= $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x + \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x-1}$

= $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} + \lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x-1}$

= $\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

= $\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\times\frac{1}{x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = +\infty$

لأن: $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$ ؛ $X\to 0$ ؛ $+\infty$

ومنه: الدالة f تقبل نصف مماس عمودي عند 1 باتجاه $+\infty$

* التفسير الهندسي:

(C) تقبل نصف مماس عمودي عند 1 باتجاه $+\infty$

2- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = +\infty$

3- إثبات أنه من أجل كل $x \geq 1$ ؛ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[1,+\infty[$ ؛ ولدينا:

$f'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$= \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ #

بما أن $x>1$ فإن: $f'(x)>0$

ومنه: الدالة f متزايدة تماما على D

ج) جدول التغيرات:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ +	
$f(x)$	$f(1)=0$	↗ $+\infty$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$g(x) = \frac{e^x + 1}{2e^x}$; $D_g = [0; +\infty[$

أ- إثبات أنه من أجل كل $x \geq 0$; $g(x) \geq 1$

$g(x) - 1 = \frac{e^x + 1}{2e^x} - 1 = \frac{e^x + 2e^x + 1}{2e^x}$

$= \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x} \geq 0$

إذن من أجل كل $x \geq 0$; $g(x) - 1 \geq 0$

$g(x) \geq 1$ ومنه

2- أ- إثبات أن: $g \circ f(x) = x$ ثم إثبات

أنه إذا كانت $M(x;y)$ نقطة من (C_f) فإن

$M'(y;x)$ نقطة من (C_g)

$(g \circ f)(x) = \frac{e^{2f(x)} + 1}{2e^{f(x)}} = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^2 + 1}{2(x + \sqrt{x^2-1})}$

$(g \circ f)(x) = \frac{x^2 + x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2-1} + 1}{2(x + \sqrt{x^2-1})}$

$= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1}}{2(x + \sqrt{x^2-1})}$

$= \frac{2x(x + \sqrt{x^2-1})}{2(x + \sqrt{x^2-1})} = x$

$(g \circ f)(x) = x$ ومنه: $x \geq 0$ من أجل كل x *

$M(x;y)$ نقطة من المنحنى (C_f) *

حيث: $y = f(x)$

وبما أن $g[f(x)] = x$ فإن $M'(y;x)$ نقطة

من المنحنى (C_g) أي $M(y;x) \in (C_g)$ ،

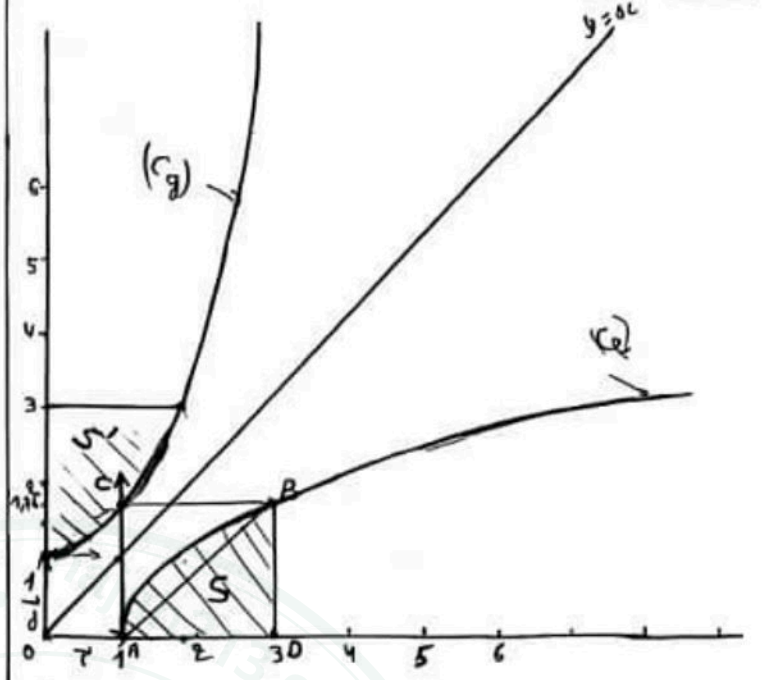
ب- الاستنتاج حول (C_f) و (C_g) ،

بما أن المستوي منسوب إلى م م م فإن

المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة

للمنصف الأول ذو المعادلة $y = x$

3) الإنشاء ،



4- حساب مساحة كل من المستطيل ACBD

و المثلث ABD :

S : مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

و محور الفواصل و المستقيمين $x=1$ و $x=3$ ،

$S = \int_1^3 f(x)\,dx$ ومنه

لدينا النقطة A من (C_f) أي $A(1;0)$

و B نقطة من (C_f) فاصلتها 3 أي $B(3;f(3))$

$f(3) = \ln(3+\sqrt{8}) = \ln(3+2\sqrt{2}) \Leftrightarrow B(3;1,76)$

$= \ln(1+\sqrt{2})^2 = 2\ln(1+\sqrt{2})$

ومنه: مساحة المثلث ABD هي A_1

$A_1 = \frac{BD \times AD}{2} = \frac{f(3) \times 2}{2} = f(3) = 2\ln(1+\sqrt{2})$ cm²

و A_2 ، مساحة المستطيل ACBD

$A_2 = AD \times BD = 2f(3) = 4\ln(1+\sqrt{2})$ cm²

ب- الاستنتاج أن $2\ln(1+\sqrt{2}) \leq S \leq 4\ln(1+\sqrt{2})$

نلاحظ أن المساحة S محصورة بين مساحة

المثلث ABD أي A_1 و مساحة المستطيل ACBD.

أي $2\ln(1+\sqrt{2}) \leq S \leq 4\ln(1+\sqrt{2})$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

(Cg) رسم

3) ب/ إثبات أن: $S' = 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)\,dx$

S' : مساحة الحيز المحدد بـ (Cg) والمستقيمات

$x=0$; $y=3$; $x=2\ln(1+\sqrt{2})$

$$S' = \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} [3-g(x)]\,dx = \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} 3\,dx - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)\,dx$$

$$= [3x]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)\,dx$$

$$S' = 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)\,dx$$

ثم استنتاج قيمة S

ب/ حساب: $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)\,dx$

لدينا، $g(x) = \frac{e^x+1}{2e^x} = \frac{e^x(e^x+e^{-x})}{2e^x}$

$$= \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

ومنه $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} (e^x+e^{-x})\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(4\sqrt{2}) = \boxed{2\sqrt{2}}$$

ملاحظة، $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$ بالشكل المرافق.

استنتاج قيمة S :

بما أن (Cg) و (Cg') متناظران بالنسبة للمنصف الأول $y=x$ فإن $S = S'$

أي، $S = S' = 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)\,dx$

$$S = 6\ln(1+\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}\ cm^2 \quad (u.a)$$

انتهى بالتوفيق و النجاح
لتلاميذي الأعزاء.
عن الأستاذة، مرزوقي

www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com