najah213.com · نجاح 213

المجاهد الحاج خيري الخير –مقرة–

السنة الدراسية : 2022 – 2023

الفرض الأول للثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المستوى : ثالثة تقني رياضي

المدة : ساعة ونصف

التمرين الأول:

لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرّفة بـ: $U_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم: $U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)U_n$.

1) أ) برهن بالتراجع ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن: $U_n \geq 0$.

ب) أُدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، استنتج أنها متقاربة ثم عيّن نهاية المتتالية (U_n).

2) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي: $V_n = \frac{U_n}{n}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) أثبت أنّ المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول V_1.

ب) أُكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

3) نعتبر المتتالية العددية بدلالة (W_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $W_n = \ln(V_n)$.

أ) برهن أن المتتالية (W_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول W_1.

4) أُحسب بدلالة n كل من S_n و P_n حيث: $S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ و $P_n = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$.

التمرين الثاني:

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - (x^2+1)e^{-x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول 1cm

1) أ) أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$.

جـ) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ ثم أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$.

4) أُكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

6) أُحسب $f(0)$ ، $f(3)$ ثم أُرسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f).

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$.

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1}\,dx$.

1) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة : $g : x \longmapsto xe^{-x+1}$.

2) باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن: $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ من أجل كل عدد طبيعي n.

3) أُحسب I_1 ثم استنتج I_2.

4) أُحسب بـ cm^2 مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 1$.

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

تصحيح فرض مادة الرياضيات :

التمرين الأول :

لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرّفة بـ: $U_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم: $U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)U_n$.

1) أ)نبرهن بالتراجع ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن: $U_n \geq 0$.

نسمي الخاصية $p(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $U_n \geq 0$

من أجل $n = 1$ لدينا : $U_1 = \frac{1}{2} \geq 0$ ومنه $p(1)$ صحيحة

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n عدد طبيعي كيفي حيث : $n \geq 1$

و نثبت صحة $p(n+1)$ أي $U_{n+1} \geq 0$

لدينا من الفرض : $U_n \geq 0$ ومنه $\frac{n+1}{2n}U_n \geq 0$ وعليه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $U_n \geq 0$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) وإستنتاج أنها متقاربة

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{n+1}{2n} - 1\right)U_n = \frac{n+1-2n}{2n}U_n = \frac{1-n}{2n}U_n$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $\frac{1-n}{2n} \leq 0$ و $U_n \geq 0$ ومنه

$U_{n+1} - U_n \leq 0$. إذن (U_n) متتالية متناقصة

بماأن (U_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل بـ: 0 فهي متقاربة.

-تعيين نهاية المتتالية (U_n).

بما أن المتتالية (U_n) متقاربة والدالة f المعرفة بـ $f(x) = x$ مستمرة من أجل كل $x \geq 1$ فإن نهاية المتتالية (U_n) تحقق: $\ell = \frac{1}{2}\ell$ حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

ومنه $\frac{1}{2}\ell = 0$ إذن $\ell = 0$.

2) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي: $V_n = \frac{U_n}{n}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية وتحديد أساسها و حدها الأول :

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{n+1} = \frac{U_n}{2n} = \frac{1}{2}V_n$$

إذن V_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $V_1 = \frac{1}{2}$

ب) تعين عبارة V_n : $V_n = V_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2^n}$

تعين عبارة U_n : لدينا $V_n = \frac{U_n}{n}$ ومنه $U_n = nV_n$ إذن: $U_n = \frac{n}{2^n}$

3) نعتبر المتتالية العددية بدلالة (W_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $W_n = \ln(V_n)$.

أ) برهان أن المتتالية (W_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$W_{n+1} - W_n = \ln(V_{n+1}) - \ln(V_n) = \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = -\ln 2 = r$.

$W_1 = \ln V_1 = -\ln 2$.

4) حساب بدلالة n كل من S_n و P_n

S_n عبارة عن مجموع حدود متتالية حسابية

إذن: $S_n = \frac{n}{2}(W_n + W_1) = \frac{n}{2}(-\ln 2 - (n-1)\ln 2 - \ln 2)$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ومنه : $S_n = -\frac{n\ln 2}{2}(n+1)$

حساب P_n: $P_n = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\ldots+n}$ ومنه $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n)}{2}}$.

التمرين الثاني: I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - (x^2+1)e^{-x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول 1cm

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} x-(x^2+1)e^{-x+1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-(x^2+1)e^{-x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2e^{-x}e^1 - e^{-x+1} = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$.

ب) نبيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1+(x-1)^2e^{-x+1}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]-\infty;+\infty[$

ودالتها المشتقة: $f'(x) = 1-(2x)e^{-x+1}+(x^2+1)e^{-x+1} = 1+e^{-x+1}(x^2+1-2x) = 1+(x-1)^2e^{-x+1}$.

جـ) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $(x-1)^2e^{-x+1} \geq 0$ ومنه $1+(x-1)^2e^{-x+1} > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) نبيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} -(x^2+1)e^{-x+1} = 0$$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-x = -(x^2+1)e^{-x+1} < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty;+\infty[$.

3) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty;+\infty[$ وبالأخص المجال $[1.8;1.9]$ ولدينا $f(1.8) < 0$ $f(1.9) < 0$ إذن $f(1.8) \times f(1.9) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$.

4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1) = 1(x-1)+1-2$ ومنه $(T): y = x-2$.

5) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$

الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} - (x-1)^2e^{-x+1} = e^{-x+1}(x-1)(2-x+1) = (3-x)(x-1)e^{-x+1} = -(x-3)(x-1)e^{-x+1}$.

استنتاج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

$f''(x)=0$ يكافئ $x=3$ أو $x=1$ ومنه:

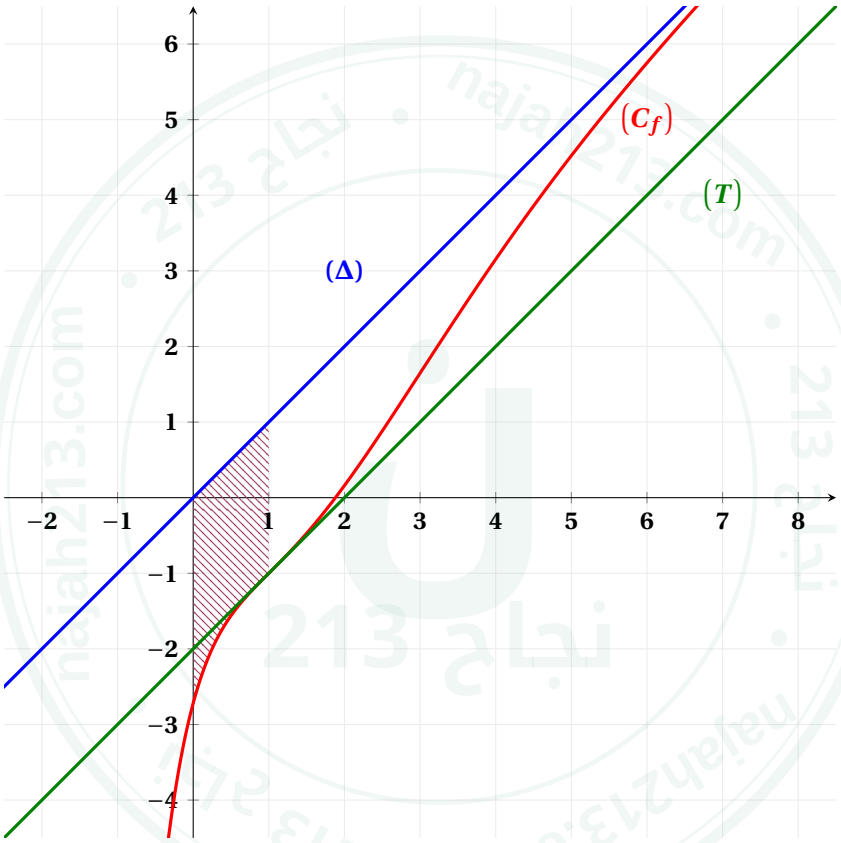
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة f'' تنعدم عند 1 و 3 وتغير إشارتها ومنه (C_f) يقبل نقطتي انعطاف هما: $(1;f(1))$ و $(3;f(3))$.

6) $f(0)=-\mathbf{e}$ ، $f(3)=3-10\mathbf{e}^{-2}\approx 1.65$

رسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f).



7) نناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$.

m	عدد وإشارة الحلول
$m\in]-\infty;-\mathbf{e}[$	حل وحيد سالب تماما
$m=-\mathbf{e}$	حل معدوم
$m\in]-\mathbf{e};0[$	حل موجب تماما
$m\geq 0$	لا يوجد حلول.

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $I_n=\int_0^1 x^n\mathbf{e}^{-x+1}\,dx$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

1) نبين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة: $g: x \longmapsto xe^{-x+1}$.

الدالة G قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $G'(x)=-e^{-x+1}+(x+1)e^{-x+1}=(x+1-1)e^{-x+1}=xe^{-x+1}=g(x)$.

2) باستعمال التكامل بالتجزئة نبين أن: $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ من أجل كل عدد طبيعي n.

$$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}\,dx$$

$$U(x)=x^{n+1} \qquad U'(x)=(n+1)x^n$$

$$V'(x)=e^{-x+1} \qquad V(x)=-e^{-x+1}$$

$$I_{n+1}=\left[-x^{n+1}e^{-x+1}\right]_0^1+\int_0^1 (n+1)x^n e^{-x+1}\,dx=-1^{n+1}+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}\,dx=-1+(n+1)I_n$$

3) نحسب I_1 :

$$I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx=[G(x)]_0^1=-2e^0+e=e-2$$

استنتاج I_2: $I_2=-1+2I_1=-1+2e-4=2e-5$

4) الحساب بـ cm^2 مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ): نعلم مما سبق أن $f(x)-x<0$ من أجل كل $x\in[0;1]$

$$\int_0^1 [f(x)-x]\,dx=\int_0^1 -(x^2+1)e^{-x+1}\,dx=\int_0^1 (x^2+1)e^{-x+1}\,dx=\int_0^1 x^2e^{-x+1}\,dx+\int_0^1 e^{-x+1}\,dx$$

ومنه

$$\int_0^1 [f(x)-x]\,dx=I_2+I_0=I_2+I_1+1=2e-5+e-2+1=3e-6 \quad Cm^2$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com