najah213.com · نجاح 213

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية جيجل — الموسم الدراسي: 2024م-2025م

ثانوية راشدي محمد -سيدي معروف — المستوى: الثالثة -رياضيات

الفرض الأول للفصل الثاني في مادة الرياضيات — المدة: ساعتان

نص التمرين:

I/ عين عبارة الدالة f الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $2y'' + y' - 1 = 0$ الذي يحقق: $f(2) = 2$ و $f'(2) = 0$.

II/ نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2$ ،

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أُدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ ا/ بين أن المستقيم (D) ذو معادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

ب/ أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

3/ ا/ أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x$.

ب/ أُحسب $f(6)$ ثم أنشئ بدقة كلا من (D) و (Δ) و (C_f) . (وحدة الطول 2 cm)

4/ ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $(f(x))^2 = 4e^{-x+2} + (x-2)^2 + 4(x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1}$.

ب/ بيّن أنّ: $\int_0^2 (4e^{-x+2} + (x-2)^2)\,dx = 4e^2 - \frac{4}{3}$.

ج/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_0^2 (x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1}dx = -4$.

د/ استنتج بـ cm^3 الحجم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول محور الفواصل على المجال $[0;2]$.

III/ نعرّف متتالية (u_n) بحدها الأول $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2e^{-\frac{1}{2}u_n+1} + u_n - 2$.

1/ ا/ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 6$.

3/ أُدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة وعيّن نهايتها.

IV/ نعتبر n عددا طبيعيا. نضع: $A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1}dx$ ، ونعرّف متتالية (v_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = A(n) - 4e$.

1/ أُكتب $A(n)$ بدلالة n وأعط تفسيره الهندسي، ثم أُحسب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$.

2/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\int_n^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1}dx \geq 0$ ثم استنتج رتابة المتتالية (v_n) .

3/ بيّن أن (v_n) متتالية هندسية معينا أساسها وحدها الأول.

4/ ا/ أُحسب بدلالة n العدد I_n بحيث: $I_n = \int_0^n (x-2)dx$.

ب/ أُحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx + \cdots + \int_0^n f(x)dx$.

(**إرشاد:** من أجل كل عدد طبيعي n : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ثانوية الشهيد محمد ... — السنة: 4 رياضيات — 2024/2025

- سيدي معروف.

إجابة الفرض الأول الفصل الثاني.

(I) تعيين عبارة f بالحل الخاص للمعادلة التفاضلية $2y'' + y' - 1 = 0$

$y'' = -\frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}$ معناه:

$f'(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}$ إذن:

$f'(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + 1$ (0,1) $(C_1 \in \mathbb{R})$

بما أن $f'(2) = 0$ معناه: $C_1 e^{-1} + 1 = 0$

ومنه: $C_1 = \frac{-1}{e^{-1}} = -e$ أي

$f'(x) = -e e^{-\frac{1}{2}x} + 1 = -e^{-\frac{1}{2}x+1} + 1$. (0,25)

$f(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x+1} + x + C_2$ (0,1) ومنه: $(C_2 \in \mathbb{R})$

$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x + C_2$

ولدينا: $f(2) = e$ معناه: $2e^0 + 2 + C_2 = 2$ (0,25)

ومنه: $C_2 = -2$

إذن: $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2$

(II) $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2$ / $D_f = \mathbb{R}$

1- دراسة تغيرات الدالة f:

• النهايات:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2\right)$ (0,25)

$= +\infty$

[لأن: $\lim_{x \to +\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} = \lim_{t \to -\infty} 2e^t = 0$]

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2\right)$

$= \lim_{x \to -\infty} x\left(2\frac{e^{-\frac{1}{2}x+1}}{x} + 1 - \frac{2}{x}\right)$

$= +\infty$ (0,1)

إتجاه التغير: لدراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

$f'(x) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x+1} + 1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}x+1}$ (0,1)

ولدينا:

$1 - e^{-\frac{1}{2}x+1} > 0$ معناه: $1 > e^{-\frac{1}{2}x+1}$ أي $0 > -\frac{1}{2}x + 1$ ومنه $-1 > -\frac{1}{2}x$ إذن $2 < x$

$1 - e^{-\frac{1}{2}x+1} = 0$ معناه: $1 = e^{-\frac{1}{2}x+1}$ أي $0 = -\frac{1}{2}x + 1$ إذن $x = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$ (0,1)

وبالتالي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

(0,25) الدالة f متناقصة تماماً على $]-\infty, 2]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[2, +\infty[$.

1- تبيان أن $(D): y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $(+\infty)$:

لدينا $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2$

و $\lim_{x \to +\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} = 0$ (0,1)

إذن المستقيم $(D): y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- الوضعية النسبية: لدراسة إشارة $f(x) - (x-2)$ على $\mathbb{R}$:

$f(x) - (x-2) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} > 0$ على $\mathbb{R}$ (0,25)

إذن (C_f) يقع فوق (D)

3- أ- دراسة وضعية (C_f) و (Δ):

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) - x = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} - 2 = 2\left(e^{-\frac{1}{2}x+1} - 1\right)$ (0,25)

www.dzexams.com

Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$= -4e^1 + 2\left[-2e^{-\frac{1}{2}x+1}\right]_0^2$

$= -4e + 2\left(-2e^0 + 2e\right) = -4e - 4 + 4e$

$= -4$

حساب الحجم:

$V = \int_0^2 \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_0^2 (f(x))^2 dx$

$= \pi \int_0^2 \left(4e^{-x+2} + (x-2)^2\right) dx + \pi \int_0^2 (x-2)^2 e^{-x+1} dx$

$= \pi \left(4e^2 - \frac{4}{3} - \frac{46}{3}\right)$

$V = \pi \left(4e^2 - \frac{50}{3}\right)$ u.V

$V = 8\pi \left(4e^2 - \frac{25}{3}\right)$ cm³

(III): (u_n): $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

أ- التخمين:

(u_n) متقاربة ومحتواة في المجال $[2;6]$ ، $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ يبدو أن (u_n) متناقصة تماما.

2- البرهان بالتراجع:

$P(n)$: $2 \leq u_n \leq 6$

$P(0)$: $2 \leq u_0 = 6 \leq 6$ ؛ $n=0$ أول عدد طبيعي

$P(0)$ صحيحة.

نفرض أن $P(k)$ صحيحة حيث k عدد طبيعي

أي $2 \leq u_k \leq 6$ ، بما أن f دالة متناقصة على المجال $[2;6]$ فإن:

$f(2) \geq f(u_k) \geq f(6)$

أي $2 \leq u_{k+1} \leq 6$

بما أن $f(6) \simeq 4,27 < 6$

إذن $P(k+1)$ صحيحة.

بما أن $P(0)$ صحيحة و $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل n من $\mathbb{N}$

$2 \leq u_n \leq 6$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$

ب- الصفحة 05

$f(x) - x = -2\left(1 - e^{\frac{1}{2}x+1}\right)$ أي:

وهو ما سبق ذكره:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) و (Δ) يتقاطعان عند النقطة $(2;2)$		(C_f) يقع تحت (Δ)

ب- الإنشاء: (1)

$f(6) = 2e^{-e} + 4 \simeq 4,27$

* جدول تغيرات الدالة f':

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(0) = 2e - 2 \simeq 3,44$

4- أ- التحقق: لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$(f(x))^2 = \left(2e^{-\frac{1}{2}x+1} + (x-2)\right)^2$

$= 4e^{-x+2} + (x-2)^2 + 4(x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1}$

ب- حساب التكامل:

$\int_0^2 \left(4e^{-x+2} + (x-2)^2\right) dx = \left[-4e^{-x+2} + \frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2$

$= \left[-4e^0 - \left(-4e^2 - \frac{8}{3}\right)\right]$

$= -4 + 4e^2 + \frac{8}{3} = -\frac{4}{3} + 4e^2$

ج- المكاملة بالتجزئة:

$\int_0^2 (x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1} dx$

نضع: $u(x) = x-2$ ، $v'(x) = e^{-\frac{1}{2}x+1}$

فإن: $u'(x) = 1$ ؛ $v(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x+1}$

$\int_0^2 (x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1} dx = \left[(x-2)\left(-2e^{-\frac{1}{2}x+1}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 -2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx$

www.dzexams.com

Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n):

$n \in \mathbb{N}$ من أجل كل

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

ومنه حسب ما سبق (دراسة إشارة $f(x)-x$)

فإنه لما $2 \leq u_n \leq 3$ (0,5)

فإن $f(u_n) - u_n < 0$

ومنه (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$. (0,25)

- الاستنتاج: المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 (0,5)

إذن هي متقاربة.

- تعيين نهايتها: نحل المعادلة $f(x) = x$

ومنه $x = 2$

إذن: $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$ (0,5)

II) - أ- حساب $A(n)$ بدلالة n:

$A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx$; $n \in \mathbb{N}$

$v_n = A(n) - 4e$.

ب- استنتاج أن (v_n) متتالية هندسية:

$A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx = 2\left[-2e^{-\frac{1}{2}x+1}\right]_0^n$ (0,5)

$= 2\left(-2e^{-\frac{1}{2}n+1} + 2e\right)$ (0,5)

$A(n) = -4e^{-\frac{1}{2}n+1} + 4e$.

ج- التفسير الهندسي للعدد $A(n)$:

لدينا $A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx = \int_0^n [f(x) - (x-2)] dx$

وبما أن $f(x) - (x-2) > 0$ من أجل كل x من $[0; n]$ فإن $A(n)$ هو مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (D) والمستقيمين $x=0$ و $x=n$. (0,5)

- حساب النهاية: $\lim_{n \to +\infty} A(n) = \lim_{n \to +\infty} (-4e^{-\frac{1}{2}n+1} + 4e) = 4e$ (0,5)

$\left[\lim_{n \to +\infty} -4e^{-\frac{1}{2}n+1} = \lim_{t \to -\infty} -4e^{t} = 0\right]$ (0,5)

د- التبرير: لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2e^{-\frac{1}{2}x+1} > 0$

ومنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\int_n^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx > 0$ (0,5)

- أ- تبيان أن (v_n) هندسية:

$v_{n+1} = A(n+1) - 4e = -4e^{-\frac{1}{2}(n+1)+1}$

$= -4e^{-\frac{1}{2}n+1} e^{-\frac{1}{2}} = v_n\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ (0,5)

$q = e^{-\frac{1}{2}}$ (0,25) إذن (v_n) هندسية أساسها

حدها الأول: $v_0 = A(0) - 4e = 0 - 4e$

$v_0 = -4e$ (0,25)

ب- حساب I_n بدلالة n:

$I_n = \int_0^n (x-2) dx = \left[\frac{1}{2}(x-2)^2\right]_0^n$

$= \frac{1}{2}(n-2)^2 - \frac{1}{2}(-2)^2$ (0,5)

$= \frac{1}{2}n^2 + 2 - 2n$

$= \frac{1}{2}n^2 - 2n$.

ج- حساب S_n بدلالة n:

$S_n = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \cdots + \int_0^n f(x) dx$.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$\int_0^n f(x) dx = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx + \int_0^n (x-2) dx$ (0,25)

$= A(n) + I_n = v_n + 4e + I_n$

ومنه

$S_n = \left(v_0 + 4e + \frac{1}{2}(0)^2 - 2(0)\right) + \left(v_1 + 4e + \frac{1}{2}(1)^2 - 2(1)\right) + \left(v_2 + 4e + \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2)\right) + \cdots + \left(v_n + 4e + \frac{1}{2}(n)^2 - 2n\right)$

$= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (4e + 4e + \cdots + 4e) + \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (-2 - 4 - \cdots - 2n)$

- الصفحة 03 -

www.dzexams.com

Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$S_n = \left(\frac{-4e^{\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{2}n}\right) + (4e)n + \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) - n^2 - n$

$S_n = \left(\frac{-4e^{\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{2}n}\right) + \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + (4e-\frac{5}{6})n$

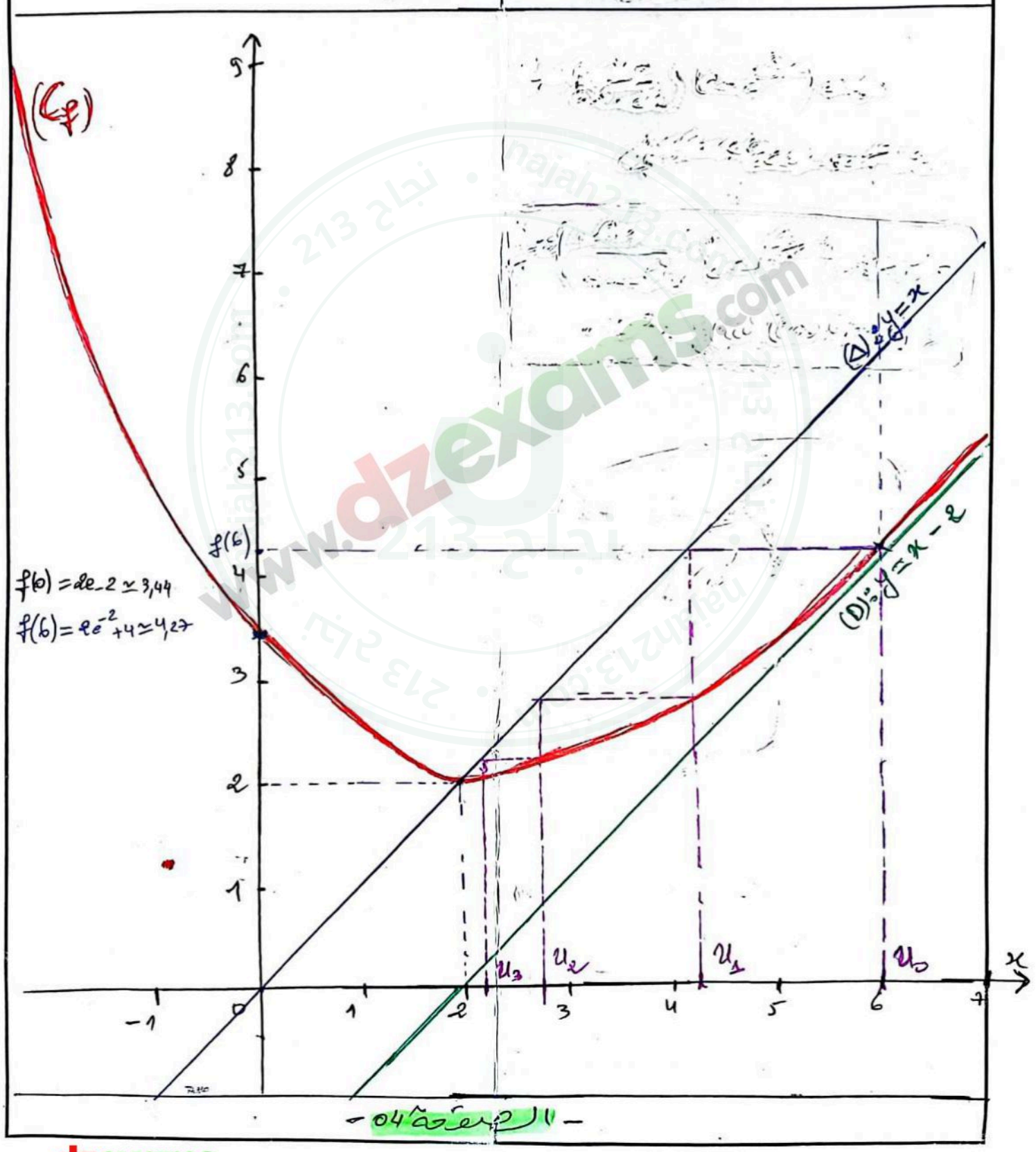
$\frac{1}{6}n^3$

$S_n = v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) + 4e(n) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{2}$

$+ \left(\frac{8-2n}{2^1}\right)(n)$ 0,75

$S_n = -4e e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1-(e^{-\frac{1}{2}})^n}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right) + 4en + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

$-n-n^2$



www.dzexams.com
Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$S_n = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx + \dots + \int_0^n f(x)dx .$$

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq 1$ ، x من $[0;n]$:

$$\int_0^n f(x)dx = \int_0^n \left(2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2\right)dx = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1}dx + \int_0^n (x-2)dx .$$

$$= A(n) + I_n = \boxed{v_n + 4e + \frac{1}{2}n^2 - 2n} \quad (0,5)$$

ليكن : $w_n = -2n$ فإن (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$ وحدها الأول $w_0 = 0$.

$$S_n = \left(v_1 + 4e + \frac{1}{2}(1)^2 + w_1\right) + \left(v_2 + 4e + \frac{1}{2}(2)^2 + w_2\right) + \dots$$

$$\dots + \left(v_n + 4e + \frac{1}{2}(n)^2 + w_n\right)$$

$$= \left(v_1 + v_2 + \dots + v_n\right) + \underbrace{\left(4e + 4e + \dots + 4e\right)}_{n \text{ مرة}} + \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2\right)$$

$$+ \left(w_1 + w_2 + \dots + w_n\right)$$

$$= v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) + 4e(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \left(w_1 + w_n\right)\frac{n}{2} . \quad (0,75)$$

$v_1 = v_0 \times q$

$$= -4e\,e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^n}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right) + 4en + \frac{1}{12}(n)(n+1)(2n+1) + (-2-2n)\frac{n}{2}$$

$$\boxed{S_n = \left(\frac{-4e^{\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{2}n}\right) + 4en + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - n(n+1)}$$

$$S_n = \left(\frac{-4e^{\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{2}n}\right) + \frac{1}{6}n^3 - \frac{3}{4}n^2 + \left(\frac{48e-11}{12}\right)n .$$

www.dzexams.com

Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com